УДК 517.911865

М.М.Букенов, С.Хабдолда, Б.Хабдолда

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: nani_serik77@mail.ru)

Итерационный метод решения статических задач теории упругости в напряжениях

В статье исследовано асимптотическое поведение при $t \to \infty$ динамической вязкоупругой задачи, построенной на основе использования вязкоупругой модели Максвелла. Получены оценки скорости сходимости решения вязкоупругой задачи к решению статической упругости. Исследуемая модель применяется при построении трехслойного итерационного метода решения статической упругой задачи в напряжениях.

Ключевые слова: теория вязкоупругости, модель Максвелла вязкоупругого тела, решение задачи вязкоупругости в напряжениях, неравенства Корна и Пуанкаре, метод итераций Чебышева.

1. Исследование асимптотических свойств вязкоупругой среды

Постановка задачи содержит следующие соотношения. Уравнения движения сплошной среды:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i \equiv L_i \bar{\sigma};\ x \in \Omega \subset R, \tag{1}$$

соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) i, k = 1,2,3 \tag{2}$$

и уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_{ik}}{\partial t} + \dfrac{1}{\theta_1} s_{ik} = 2\mu \dfrac{\partial l_{ik}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \dfrac{1}{\theta_2}\sigma = 3K \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} \end{cases}; \tag{3}$$

$$s_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma,\ \ \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};$$

$$l_{ik} = \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon,\ \ \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33};$$

$$\theta_1 = \frac{\eta_1}{\mu},\ \theta_1 = \frac{\eta_2}{\mu},\ K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}.$$

Уравнения (3) получаются путем применения вязкоупругой модели Максвелла [1] к девиатором s_{ik}, ℓ_{ik} и шаровым составляющим σ, ε тензоров напряжений и деформаций. λ и μ — коэффициенты Ламе; η_1 и η_2 — сдвиговый и объемный коэффициенты вязкости. На границе *Г* области Ω задаются напряжения

$$\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(x,t) n_k = g_i(x),\ x \in \Gamma, \tag{4}$$

в начальный момент времени заданы перемещения и их скорости

$$\bar{u}(x,0) = \bar{u}_0(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \bar{u}_1(x),\ x \in S. \tag{5}$$

В дальнейшем будем рассматривать постановку задач (1)–(5) в напряжениях, предложенную А.Н.Коноваловым [2, 3]. В качестве следствий из (1), (2) можно получить

$$2\rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial t^2} = \frac{\partial L_i \bar{\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial L_k \bar{\sigma}}{\partial x_i}. \tag{6}$$

Начальные условия

$$\sigma_{ik}(x,0) = \alpha_{ik}(x), \left.\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta_{ik}(x) \tag{7}$$

должны задаваться таким образом, чтобы деформации, найденные из (3), удовлетворяли уравнениям совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}, \; i, j, k = 1, 2, 3. \qquad (8)$$

Деформации должны быть связаны с начальными условиями (5) соотношениями (2). В [2] показано, что задачи (3), (4) (6), (7), уравнения совместности (8) выполняются на любой момент времени. Изучим вопрос сходимости решения задачи вязкоупругости в напряжениях к решению статической упругой задачи:

$$L_i \overline{\sigma} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}. \qquad (9)$$

$$\sigma_{ik} = \lambda \sigma_{ik} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ik}. \qquad (10)$$

К уравнениям (9), (10) следует добавить (8) и граничные условия (4). Запишем уравнения в векторной форме и исключим из них деформации. Тогда получим

$$\rho B \frac{\partial^2 \overline{\sigma}}{\partial t^2} + \rho C \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial t} = A\overline{\sigma} + \overline{F}, \qquad (11)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_1}{3\eta_2\eta_1} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_1}{3\eta_2\eta_1} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2}{6\eta_1\eta_2} & \frac{\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_1}{3\eta_2\eta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & 0\\
0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\\
0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_2}\\
\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\\
\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\\
0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
\end{pmatrix};$$

$$\overline{F}=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\
\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}
\end{pmatrix},\ \overline{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{pmatrix}.$$

Матрицы B и C симметричны, перестановочны и положительно определены. Относительно оператора А докажем следующую теорему.

Теорема 1. Оператор (-А) с однородными граничными условиями (4) положительно определен.

Доказательство. Введем скалярное произведение следующим образом:

$$\left(\overline{\sigma},\overline{\varepsilon}\right)=\sum_{i,k=1}^{3}\left(\sigma_{ik},\varepsilon_{ik}\right),\ \left(\sigma_{ik},\varepsilon_{ik}\right)=\int_{\Omega}\sigma_{ik}\left(M\right)\varepsilon_{ik}\left(M\right)dM.$$

Соотношения (3) в векторной форме имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon}}{\partial t}=B\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}+C\overline{\sigma}. \quad (12)$$

В [2] показано, что следствием из (6) получается

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(\overline{\varepsilon}\right)=0, \quad (13)$$

где $G\left(\overline{\varepsilon}\right)$— операторная запись уравнений совместности деформаций (8). Тогда исходя из (13) и (12) и пользуясь линейностью оператора G, имеем:

$$0=\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(\overline{\varepsilon}\right)=G\left(\frac{\partial^2\overline{\varepsilon}}{\partial t^2}\right)=G\left(B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2}+C\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(B\overline{\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial t}G\left(C\overline{\sigma}\right). \quad (14)$$

Если $\theta_1=\theta_2=\theta$ (3), то легко получить:

$$C=\frac{1}{\theta}B. \quad (15)$$

Используя (15), из (14) имеем $\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\left(B\overline{\sigma}\right)+\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}G\left(B\overline{\sigma}\right)=0.$ Решение этого уравнения имеет вид

$$G\left(B\overline{\sigma}(t)\right)+\theta\frac{\partial}{\partial t}G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}\left(1-e^{-\frac{t}{\theta}}\right)+G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}. \tag{16}$$

Выше был описан способ построения начальных данных в напряжениях. Он обеспечивает выполнение уравнения совместности (8) для деформаций и их скоростей в начальный момент времени:

$$G\left(\overline{\varepsilon}\right)\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}G\left(\overline{\varepsilon}\right)\Big|_{t=0}=0. \tag{17}$$

Однако из уравнений (12) или (13) видно, что остается произвол в выборе начальных напряжений и их скоростей (7). Поэтому при $t = 0$ можно положить $\overline{\varepsilon}(x,0)=B\overline{\sigma}(x,0).$ Тогда из (17) и (12) имеем

$$G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial}{\partial t}G\left(B\overline{\sigma}\right)\Big|_{t=0}=0. \tag{18}$$

Подставив (18) в (16), получаем

$$G\left(B\overline{\sigma}(t)\right)\equiv 0. \tag{19}$$

Если ввести функцию

$$\varepsilon^*(x,t)=B\overline{\sigma}(x,t), \tag{20}$$

то для нее выполнено уравнение совместности (8), и тогда существует вектор $u^*(x,t)$ такой, что $2\varepsilon^*_{ik}=\frac{\partial u_i^*}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k^*}{\partial x_i}.$ Пользуясь неравенствами Корна и Пуанкаре [4], можно получить оценку

$$\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)=\left(B^{-1}\overline{\varepsilon}^*,\overline{\varepsilon}^*\right)\geq c\left\|\overline{u}^*\right\|^2, \tag{21}$$

где константа C зависит от λ и μ области Ω. Так как матрица B положительно определена, то

$$\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)=\left(B\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)\geq c_1\left\|\sigma\right\|^2. \tag{22}$$

Учитывая однородные граничные условия (4), получаем равенство $\left(-A\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2,$ $P_k\overline{\sigma}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{kj}}{\partial x_j},$ для проведения дальнейших оценок применим неравенства (21) и (22):

$$\left(-A\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)=\frac{\sum_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}\geq c\frac{\sum_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2\left\|\overline{u}^*\right\|^2}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}\geq$$

$$\geq c\frac{\left[\sum_{k=1}^{3}\left(P_k\overline{\sigma},u_k^*\right)\right]^2}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}=c\frac{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)^2}{\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)}=c\left(\overline{\varepsilon}^*,\overline{\sigma}\right)\geq cc_1\left\|\overline{\sigma}\right\|^2.$$

Окончательно получаем

$$\left(-A\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)\geq c_2\left\|\overline{\sigma}\right\|^2,\ c_2=cc_1. \tag{23}$$

Рассмотрим разность решений вязкоупругой задачи (6), (3), (7), (4) $\overline{\sigma}^b$ и статической задачи теории упругости (8), (9), (10), (4):

$$\overline{\sigma}(x,t)=\overline{\sigma}^b(x,t)-\overline{\sigma}^y(x). \tag{24}$$

Для разности $\overline{\sigma}$ получаем однородную задачу

$$B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2}+C\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}=\frac{1}{\rho}A\overline{\sigma};\tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(x,t)n_k=0;\tag{26}$$

$$\overline{\sigma}(x,0)=\overline{\alpha}(x)-\overline{\sigma}^y(x)=\overline{\alpha_1}(x);$$

$$\left.\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}\right|_{t=0}=\overline{\beta}(x).\tag{27}$$

Получим оценку скорости сходимости функции $\overline{\sigma}(x,t)$ к нулю. Введем функцию $\overline{z}(x,t)$

$$\overline{\sigma}(x,t)=e^{-\alpha t}\overline{z}(x,t).\tag{28}$$

Подставим (28) в (25) и умножим полученное уравнение на $2e^{\alpha t}\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(B\frac{\partial\overline{z}}{\partial t},\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}\right)+\left(\left(\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\right)\overline{z},\overline{z}\right)\right]=2\left(\left(2\alpha B-C\right)\frac{\partial\overline{z}}{\partial t},\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}\right).\tag{29}$$

Выберем параметр $\alpha\succ 0$ таким образом, чтобы выполнялись следующие операторные неравенства:

$$\begin{cases}2\alpha B-C\le 0;\\ -\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\ge 0.\end{cases}\tag{30}$$

Тогда из (29) получаем оценку

$$\left\|\overline{z}(x,t)\right\|_1\le\left\|\overline{z}(x,0)\right\|_1,\tag{31}$$

где

$$\left\|\overline{z}(x,t)\right\|_1^2=\left(B\frac{\partial\overline{z}}{\partial t},\frac{\partial\overline{z}}{\partial t}\right)+\left(\left(-\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\right)\overline{z},\overline{z}\right).\tag{32}$$

Оценка (31) показывает, что функция $\overline{z}(x,t)$ ограничена в полунорме (32) для любого момента времени. Возвращаясь по формуле (28) к функции $\overline{\sigma}(x,t)$, получаем

$$\left\|\overline{\sigma}(x,t)\right\|_2\le e^{-\alpha t}\left\|\overline{\sigma}(x,0)\right\|_2;\tag{33}$$

$$\left\|\overline{\sigma}(x,t)\right\|_2^2=\left(B\frac{\partial\sigma}{\partial},\frac{\partial\sigma}{\partial}\right)+\alpha\frac{d}{dt}\left(B\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right)+\left(\left(-\frac{1}{\rho}A+2\alpha^2B-\alpha C\right)\overline{\sigma},\overline{\sigma}\right).\tag{34}$$

Покажем, что существует параметр $\alpha\succ 0,$ при котором выполняются соотношения (30), более того, поставим задачу определения оптимального α, т.е. при котором обеспечивается максимально возможная скорость сходимости $\overline{\sigma}(x,t)$ к нулю. Из положительной определенности оператора (-A) (23) и второго неравенства (30) получаем

$$-\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\ge\frac{1}{\rho}c_2E+\alpha^2B-\alpha C.$$

Вместо (30) рассмотрим следующие неравенства:

$$\begin{cases}2\alpha B-C\le 0;\\ -\frac{1}{\rho}A+\alpha^2B-\alpha C\ge 0,\end{cases}\tag{35}$$

из которых следует (30). Так как матрицы B и C симметричны и перестановочны, то (35) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 2\alpha\Lambda_B - \Lambda_C \le 0; \\ \dfrac{1}{\rho} c_2 E + \alpha^2 \Lambda_B - \alpha\Lambda_C \ge 0, \end{cases} \tag{36}$$

где Λ_B и Λ_C — диагональные матрицы, состоящие из собственных значений *B* и *C*, соответственно. Распишем покомпонентно первое неравенство в (36):

$$\begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\mu} - \dfrac{1}{\eta_1} \le 0, \\ \dfrac{2\alpha}{K} - \dfrac{1}{\eta_2} \le 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha \le \dfrac{1}{2\theta_1}; \\ \alpha \le \dfrac{1}{2\theta_2}. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$x \le \frac{1}{2\theta_1},\ y \le \frac{1}{2\theta_2}. \tag{37}$$

Тогда

$$\alpha = \min(x, y). \tag{38}$$

Расписывая второе неравенство в (36) и учитывая (38), для параметра α получаем следующее соотношение:

$$\alpha = \min\left(x, y, x - \sqrt{x^2 - \frac{c_2\mu}{\rho}}, y = \sqrt{y^2 - \frac{3Kc_2}{\rho}} \right).$$

Параметры *x, y* или η_1, η_2, при которых α достигает своего максимального значения $\alpha^* = \max\limits_{x\ge 0, y\ge 0} \alpha(x, y)$, принимают следующие значения:

$$x = \sqrt{\frac{c_2\mu}{\rho}}, \sqrt{\frac{c_2\mu}{\rho}} \le y \le \frac{3}{2}(\lambda+\mu)\sqrt{\frac{c_2}{\rho\mu}};\ \alpha^* = \sqrt{\frac{c_2\mu}{\rho}};$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\mu}{c_2}}, \frac{3\lambda+2\mu}{3(\lambda+\mu)}\sqrt{\frac{\rho\mu}{c_2}} \le 3\eta_2 \le \frac{3\lambda+2\mu}{2\mu}\sqrt{\frac{\rho\mu}{c_2}}; \tag{39}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}}, \frac{\mu}{3(\lambda+\mu)}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}} \le \theta_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}}. \tag{40}$$

Отметим, что θ_2 можно выбрать

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{c_2\mu}},\ \alpha^* = \frac{1}{2\theta}. \tag{41}$$

Тогда полунорма (34) упрощается и становится нормой

$$\left\|\overline{\sigma}(x,t)\right\|_2^2 = \left\| \frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{2\theta}\overline{\sigma} \right\|_B^2 + \left\|\overline{\sigma}\right\|_D^2. \tag{42}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Решение вязкоупругой задачи (11), (4), (7) сходится к решению статической задачи теории упругости (9), (10), (8), (4). При этом выполняется оценка (33) в норме (42) и оптимальные значения коэффициентов вязкости даются формулами (40).

2 Разностная схема и итерационный метод решения статической задачи теории упругости

Результат, полученный в теореме 2, можно использовать для построения численного метода решения задачи (9), (10), (8), (4). Ради простоты изложения рассмотрим двумерную задачу упругости, а именно плоскую деформацию. Тогда уравнение (11) будет иметь вид

$$B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2} + C\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t} = A\overline{\sigma} + \overline{F}, \tag{43}$$

где

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} \frac{1}{3\eta_1}+\frac{1}{9\eta_2} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & 0 \\ \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{3\eta_1}+\frac{1}{9\eta_2} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & 0 \\ \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{9\eta_2}-\frac{1}{6\eta_1} & \frac{1}{3\eta_1}+\frac{1}{9\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_1} \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 & \Delta \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix},\ \overline{\sigma}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

Плотность ρ полагаем равной единице. Область Ω, в которой определяется решение, будем считать прямоугольником $\Omega=\{0\le x_1\le L_1, 0\le x_2\le L_2\}$. Теперь граничные условия (4) запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_{11}(0,x_2)=g_1(x_2) \\ \sigma_{12}(0,x_2)=g_2(x_2) \end{cases},\ \begin{cases} \sigma_{11}(L_1,x_2)=g_3(x_2); \\ \sigma_{12}(L_1,x_2)=g_4(x_2); \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sigma_{22}(x_1,0)=g_5(x_1) \\ \sigma_{12}(x_1,0)=g_6(x_1) \end{cases},\ \begin{cases} \sigma_{22}(x_1,L_2)=g_7(x_1); \\ \sigma_{12}(x_1,L_2)=g_8(x_1). \end{cases} \qquad (44)$$

В области Ω введем прямоугольную, равномерную сетку

$$\overline{\varpi}=\left\{(x_{1,k},x_{2,}m), x_{1,k}=x_{2,m}=mh_2, \begin{matrix} k=0,\dots N_1 \\ m=0,\dots N_2 \end{matrix}\right\},\ h_1=\frac{L_1}{N_1},\ h_2=\frac{L_2}{N_2}.$$

На $\overline{\varpi}$ определим сеточные функции y_{km} и следующие разностные аналоги производных:

$$(y_{km})_{x_1}=\frac{y_{k+1,m}-y_{km}}{h_1},\ (y_{km})_{\overline{x_1}}=\frac{y_{km}-y_{k-1,m}}{h_1};$$
$$(y_{km})_{x_2}=\frac{y_{k,m+1}-y_{km}}{h_2},\ (y_{km})_{\overline{x_2}}=\frac{y_{km}-y_{k,m-1}}{h_2}; \qquad (45)$$
$$\Lambda_{11}y=y_{\overline{x_1}x_1},\ \Lambda_{22}y=y_{\overline{x_2}x_2},\ \Lambda_{12}y=y_{x_1x_2};$$
$$\Lambda_{12}^{*}y=y_{\bar{x}_1\bar{x}_1},\ \Delta_h y=\Lambda_{11}y+\Lambda_{22}y.$$

Следуя методу, изложенному в [4], запишем аппроксимацию оператора A:

$$A_h=\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & & \Lambda_{12} \\ & \Lambda_{22} & \Lambda_{12} \\ & & \\ \Lambda_{12}^{*} & \Lambda_{12}^{*} & \Delta_h \end{pmatrix}. \qquad (46)$$

Аппроксимируя производные по времени обычным способом, из (43) получим

$$B\overline{y}^{n}_{\bar{t}t}+C\overline{y}^{n}_{t^0}=A_h\overline{y}^{n}+\overline{F}^{n}. \qquad (47)$$

Здесь $y_{\bar{t}t}^{n} = \dfrac{y^{n+1} - 2y^{n} + y^{n-1}}{\tau^{2}}$, $y_{t^0}^{n} = \dfrac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau}$; τ — шаг по времени. Отметим, что полученное разностное уравнение (47) является канонической формой трехслойной разностной схемы по А.А.Самарскому [5]. Из (44) и (7) вытекают начальные и краевые условия для уравнения (47):

$$\begin{cases} y_{11,0m} = g_{1,m}, \\ y_{12,0m} = g_{2,m}, \end{cases} \begin{cases} y_{11,N_1 m} = g_{3,m}; \\ y_{12,N_1 m} = g_{4,m}; \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} y_{22,ko} = g_{5,k}, \\ y_{12,ko} = g_{6,k}, \end{cases} \begin{cases} y_{22,kN_2} = g_{7,k}; \\ y_{12,kN_2} = g_{8,k}; \end{cases}$$

$$\bar{y}_{km}^{0} = \bar{\alpha}_{km}, \bar{y}_{km,t}^{0} = \bar{\beta}_{km}. \tag{49}$$

Для решения разностной задачи (47), (48), (49) построим стандартную трехслойную итерационную схему, которая была исследована в [6]. Схема определяется следующим образом:

$$Dy_{k+1} = \alpha_{k+1}\left(D - \tau_{k+1}A\right)y_k + \left(1 - \alpha_{k+1}\right)Dy_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}F; \tag{50}$$

$$Dy_1 = \left(D - \tau_1 A\right)y_0 + \tau_1 F,\ k = 1,2,\ldots, \tag{50}$$

где y_0 — произвольное начальное приближение; D — линейный невырожденный оператор; α_k и τ_k — итерационные параметры. Решение задачи

$$-Ay + F = 0. \tag{51}$$

При помощи схемы (50), которая называется полуитерационным методом Чебышева, и в [6] доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены условия

$$\gamma_1 \le D^{-1}A \le \gamma_2,\ \gamma_1 \succ 0;\ D^{-1}A = \left(D^{-1}A\right)^{*}. \tag{52}$$

Полуитерационный метод Чебышева (50) с итерационными параметрами

$$\tau_k \equiv \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2};\ \alpha_{k+1} = \frac{4}{4 - \rho_0^2\alpha_k};\ k = 1, 2, \ldots,\ \alpha_1 = 2, \tag{53}$$

сходится в H, и для погрешности $z_k = y - y_k$ справедлива оценка

$$\|z_k\| \le q_k \|z_0\|. \tag{54}$$

Для числа итераций n имеет место оценка $n \ge n_0(\varepsilon)$, где

$$n_0(\varepsilon)\frac{\ln\frac{\varepsilon}{2}}{\ln\rho_1};\ \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi};\ \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}};\ q_k = \frac{2\rho_1^k}{1+\rho_1^{2k}};\ \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{55}$$

Разностная схема (47), (48), (49) эквивалентна (50), если выполняются следующие условия:

$$B = \frac{\tau}{2\tau_{k+1}}D,\ C = \frac{\tau\left(2 - \alpha_{k+1}\right)}{\alpha_{k+1}\tau_{k+1}}D,\ -A_h = A, \tag{56}$$

и функция $\bar{\beta}_{km}$ из (49) выбирается так:

$$\bar{\beta}_{km} = D^{-1}\left(-A\bar{\alpha}_{km} + \bar{F}\right). \tag{57}$$

Так как матрица B симметрична и положительно определена, то в качестве операторов *Д* и D в (20), (22) и (24) можно взять B:

$$Д = B;\ D = B. \tag{58}$$

Учитывая соотношение (15),

$$C = \frac{1}{\theta}B, \tag{59}$$

для параметров схемы (47) τ и θ из (56), (58) получаем выражения:

$$\tau^2 = 2\tau_{k+1}, \frac{1}{\theta_{k+1}} = \frac{\tau\left(2 - \alpha_{k+1}\right)}{\alpha_{k+1}\tau_{k+1}} \text{ или } \tau^2 = \frac{4}{\gamma_1 + \gamma_2}, \theta_k = \frac{\alpha_k\tau}{2\left(2 - \alpha_k\right)}. \tag{60}$$

Здесь γ_1 и γ_2 — константы эквивалентности операторов B и γ_1

$$\gamma_1 B \le -A_h \le \gamma_2 B, \tag{61}$$

а параметры α_k рассчитываются по формуле (53). Условие (57) с учетом (58) имеет вид:

$$B\overline{y}_t^0 = A_h \overline{y}^0 + \overline{F}. \tag{62}$$

Начальное приближение y_0 выбираем таким образом, чтобы для него выполнялись уравнения совместности, тогда из (62) имеем

$$G_h\left(B\overline{y}_t^0\right) = 0, \tag{63}$$

где $G_h(\varepsilon)$— аппроксимация уравнений (8). Это обеспечивает выполнение неравенств (61) и, значит, сходимость схемы (47).

Таким образом, согласно приведенной теореме и проведенным выше рассуждениям, решение разностной схемы (47), (48), (49) сходится к решению разностной задачи, аппроксимирующей статическую задачу теории упругости (9), (10), (8), (4). Для решения задачи (47), (48), (49) можно построить также стационарный трехслойный метод [6]. В этом случае итерационная схема имеет вид (50), в котором параметры α_k и τ_k постоянны.

$$\tau_k = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \ \alpha_k = 1 + \rho_1^2. \tag{64}$$

При этом оценка скорости сходимости схемы ухудшается по сравнению с (54).

$$\|z_k\| \le \overline{q}_k \|z_0\|;$$
$$\overline{q}_k = \rho^k \left(1 + K\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}\right), \tag{65}$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{q_k}{\overline{q}_k} = 0.$$

Поэтому для практических расчетов предпочтительней использовать метод (50) с параметрами (53).

Список литературы

1 *Роботнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.

2 *Коновалов А.Н.* О решении вязкоупругих задач в напряжениях. Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы V Всесоюз. конф. — Ч. 1. — Новосибирск, 1978. — С. 104–109.

3 *Коновалов А.Н.* Решение задач теории упругости в напряжениях. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979.

4 *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974.

5 *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.

6 *Самарский А.А., Николаев А.С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

М.М.Букенов, С.Хабдолда, Б.Хабдолда

Кернеулі серпін теориясындағы статикалық есептерді шешудің итерациялық әдісі

Мақалада Максвеллдің тұтқыр серпімді моделін қолдану негізінде құрылған динамикалық тұтқыр серпімді есептің $t \to \infty$ болғандағы асимтотикалық күйі зерттелді. Тұтқыр серпімді есептің шешімінің статистикалық серпімді шешімге жинақталу жылдамдығының бағасы алынған. Зерттелген модель кернеулердегі статистикалық серпімді есепті шешудің үшқабатты итерациялық әдісін құру үшін қолданылады.

M.M.Bukenov, S.Khabdolda, B.Khabdolda

Iterative method for solving static problems the theory of elasticity in terms of stresses

In this paper we study the asymptotic behavior as $t \to \infty$ dynamic viscoelastic problems constructed based on the use of a viscoelastic Maxwell model. Estimates of the rate of convergence of solutions of a viscoelastic problem to the solution of static elasticity. The study model is used to construct a three-layer iterative method for solving the problem in the static elastic stresses.

References

1 Rabotnov Yu.N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*, Moscow: Nauka, 1977.

2 Konovalov A.N. *On the solution of viscoelastic problems in stresses. Numerical methods for solving problems decisions of tasks in the theory of elasticity and plasticity*: Materials of All-Union Conference, Novosibirsk, 1978, p. 104–109.

3 Konovalov A.N. *Solution of Problems* of *Elasticity Theory* in *Stresses*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1979.

4 Fichera G. *Existence theorems in elasticity*, Moscow: Mir, 1974.

5 *Samarskiy A.A. Introduction to the theory of difference schemes*, Moscow: Nauka, 1971.

6 *Samarskiy A.A.*, *Nikolayev* A.S. *Methods for solving the grid equations*, Moscow: Nauka, 1977.

УДК 681.5

А.В.Букетов, Л.В.Кравцова, А.П.Богдан

Херсонская государственная морская академия, Украина
(E-mail: arundo.p@mail.ru)

Определение вероятностей восстановления образцов эпоксидных композитных материалов при повторно-переменных нагружениях

В статье представлены результаты экспериментального исследования полимерных композитных материалов при воздействии повторно-переменных нагружений. На основе экспериментальных данных методом теории случайных процессов установлены вероятности пребывания системы в различных состояниях, а также вероятность разрушения образца при достижении состояния пластической деформации. Разработанная модель позволяет прогнозировать свойства и поведение композитных материалов в процессе эксплуатации.

Ключевые слова: случайные процессы, прогнозирование свойств, вероятности состояний системы.

Постановка проблемы

Полимерные композитные материалы (ПКМ) находят широкое применение в конструкциях разного назначения. Обеспечение экономичности и безопасности эксплуатации конструкций и деталей предъявляет определенные требования к надежности и долговечности используемых материалов [1, 2]. Их высокие удельные механические характеристики особенно необходимы там, где большую роль играет требование снижения массы конструкции. Однако широкое применение ПКМ предполагает также решение ряда научно-технических проблем, связанных с их эксплуатацией. Одно из главных направлений исследований на современном этапе связано с изучением свойств, расширением понимания поведения ПКМ в условиях повторно-переменных нагрузок, с анализом накопленной информации (в том числе и экспериментальных данных), которые позволят сделать достоверные выводы. В частности, интересным с научной точки зрения является испытание образцов ПКМ на чистый изгиб при повторно-переменных нагружениях. Анализ этих испытаний с точки зрения математических методов теории случайных процессов позволит прогнозировать поведение ПКМ в процессе эксплуатации и расширить область применения КМ.