2. *Sherniyazov K.E.* Approximate restoration of functions and solutions of equation of heat conductivity with functions of distribution the initial temperature from E, SW classes // Diss. cand. of phis.-mat. sc. 01.01.01 — Mathematical analysis. — Almaty, 1998.
3. *Bakhvalov N.S.* About numerical solving of the Dirichlet problem for Laplace's equation // Vestnik of MSU. — 1959. — № 5. — P. 171–195.
4. *Temirgaliev N.* Theoretical numeric methods and theoretical probabilistic approach to problems of analysis. Embedding and approximation theory, absolute convergence and the transformation of Fourier series // Vestnik of the Eurasian National University. — 1997. — № 3. — P. 90–144.
5. *Temirgaliev N.* Theoretical numeric methods and theoretical probabilistic approach to problems of analysis. Embedding and approximation theory, absolute convergence and the transformation of Fourier series (continuation 1) // Vestnik of the Eurasian National University. — 2002. — № 3–4. — P. 222–272.
6. *Korobov N.M.* Theoretical numeric methods in approximate analysis. — M.: Fizmatgiz, 1963. — 224 p.
7. *Bailov E.A., Temirgaliev N.* About discretezation the solutions of Poisson's equation // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 47. — № 9. — P. 1594–1604.
8. *Smolyak S.A.* Quadrature and interpolation formulae on tensor products of certain classes of functions // Rep. of AS USSR. — 1963. — Vol. 148. — № 5. — P. 1042–1045.
9. *Temirgaliev N., Kudaibergenov S.S., Shomanova A.A.* Applications of Smolyak's quadrature formulae for numerical integration of the Fourier coefficients and restoration problems // News of h.s. Matem. — 2010. — № 3. — P. 52–71.

ӘОЖ 517.62

# Жай дифференциалдық теңдеулерді MathCad құралдарымен шешу

# Solution of ordinary differential Equations by means of MathCad

Ниханбаева Н.Т.

*Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: nazima_kz@mail.ru)*

В данной статье показана возможность использования современных информационных технологий с помощью простейших методов вычислений. Для этого наиболее подходящей является одна из самых мощных и эффективных математических систем — Mathcad, которая занимает особое место среди множества таких систем (Matlab, Maple, Mathematica и др.). Mathcad остается единственной системой, в которой описание решения математических задач задается с помощью привычных математических формул и знаков. Mathcad позволяет выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства научной графики.

The article reveals the possibility to apply the simplest calculation methods using modern informational technologies. One of the most powerful and effective mathematical systems — Mathcad, which has a special place among lots of similar systems (Matlab, Maple, Mathematica and others) is the most suitable for it. Mathcad remains the only one system where the description of solution of mathematical tasks is given by the help of usual mathematical formulas and signs. Mathcad allows to make both numeral and symbolic calculations. It has a very convenient mathematically-oriented interface and fine means of scientific graphic arts.

Жай дифференциалдық теңдеулерді шешу ғылыми-техникалық есептеулер тәжірибесінде кең қолданылады. Сызықтық жай дифференциалдық теңдеулердің арнайы функциялар түрінде шешімі болғанымен, көп физикалық жүйелер сызықтық емес және аналитикалық шешімдері жоқ сызықтық жай дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Бұл жағдайда дифференциалдық теңдеулерді шешуде сандық әдістерді қолдануға тура келеді.

Жай дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін, тәуелді айнымалының мәнін және туындылардың кейбір мәндерінде тәуелсіз айнымалының мәнін білу керек [1]. Егер бұл қосымша шарттар бір мәнде тәуелсіз айнымалы түрінде болса, онда мұндай есеп Коши есебі деп аталады. Егер шарттар екі немесе көп тәуелсіз айнымалы түрінде болса, онда есеп шектік деп аталады.

*Коши есебі*

Коши есебін төмендегідей сипаттауға болады:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \tag{1}$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Берілген теңдеуде жеткілікті функцияны да, бастапқы шартты қанағаттандыратын $y(x)$ функцияны табу керек.

Коши есебінің сандық шешімі $y_1, y_2, ..., y_n$. $y(x)$ теңдеудің $x_1, x_2, ..., x_n$ нүктелеріндегі шешімдері жақын мәндердің кестесін құрастырудан тұрады. Жиірек $x_i = x_0 + ih, i = 0,1,...n,$ мұндағы $h - x$ айнымалы өсімшесінің қадамы; $n - h$ қадамының шешімінің интервалдарының саны.

Коши есебінің шешімінің сандық әдістерінің екі тобын қарап шығамыз: бір қадамды және көп қадамды.

Бір қадамды әдістер — бұл $y = f(x)$ қисығындағы келесі нүктені табу үшін алдыңғы тек қана бір қадам туралы мәлімет керек болатын әдістер. Бір қадамды әдістер ішінде ең оңайы Эйлер әдісі:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h; \quad i = 0,1,...,n-1. \tag{2}$$

Эйлер әдісінде дәлдік жоғары болмайды ($h$-тың реті). Жоғары жетістіктерге жету үшін ($h^4$-тің реті), төртінші ретті Рунг-Кутта әдісін пайдаланады:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}, \tag{3}$$

мұндағы

$$k_0 = h \cdot f(x_i, y_i); \quad k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2});$$
$$k_1 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}); \; k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_2)k.$$

*Көп қадамды әдістер*

Көп қадамды әдістерде $y = f(x)$ қисығының келесі нүктесін табу үшін, алдыңғы нүктелердің бірі туралы мәліметті білу керек. $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ мәні жүйелі, бірізді төрт нүктесінде табылсын. Сонымен бірге бұрын есептелген теңдеудің оң жақ бөлігіндегі мәні бар (1) $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$. Онда Адамс әдісінің схемасын мына түрде көрсетуге болады:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h}{2}\Delta f_i + \frac{5h}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h}{8}\Delta^3 f_i; \quad i = 3,4 \;,...,n-1, \tag{4}$$

мұндағы $x_i$ нүктесіндегі шекті айырымдар мынадай түрде болады:

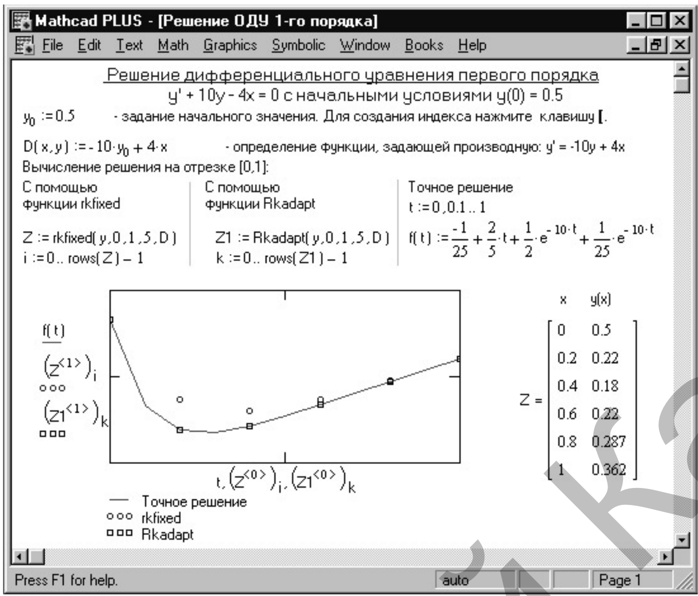
$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}; \tag{5}$$
$$\Delta_2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2};$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

*Коши есебін MathCad құралдарымен шешу*

Әр түрлі реттегі жай дифференциалдық теңдеуді шешу үшін, MathCad-та кең спектрмен кірістірілген функциялар көрсетілген [2], соның бірі (*rkfixed* — Рунге-Кутта әдісі (*rk*) төртінші ретті бекітілген (*fixed*) интегралдаулар қадамымен) 1-суретте көрсетілген.

| | |
|---|---|
| rkfixed (y, a, b, n, D) | P+1 бағаналары және n+1 жолдары бар матрицаны қайтарады. (*p* — теңдеулердің саны, немесе теңдеудің реті; *n*–[*a, b*] интервалындағы қадамдар саны) — жүйелер шешімдер кестесі: бірінші баған — бұл *x* аргументінің мәні, ал келесі бағаналар — шешімнің ординаталарының мәні; *y*–*n*-ның бастапқы шартты өлшемдерінің векторы. *D (x, y)*-функция — *n* элементтен тұратын вектор, ол алғашқы белгісіз функциялардың туындысынан тұрады |

Есепті дәлірек шығаруға болады, егер $h$ қадамын азайтатын болса, мұнда туынды жылдам өзгереді және өзін жай көрсететін жерде қадамды үлкейту керек. Ол үшін *Rkadapt*-тың функциясы ескерілген (*adaption* — адаптация) [3]. *Rkadapt* функциясымен қайтарылған аргумент пен матрица дәл солай болады *rkfixed* (1-сур.).




1-сур. 1-ші реттегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешу

*Шектік есептер*

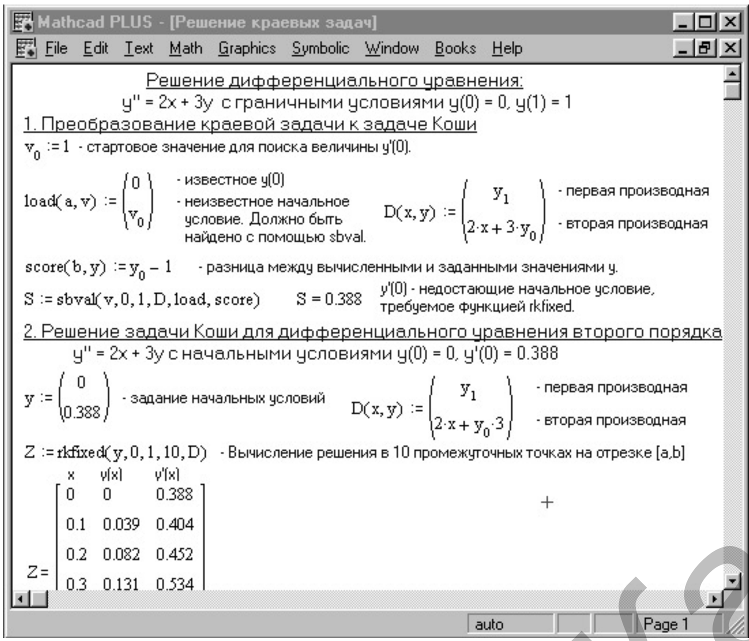
Шектік есеп төмендегіше құрастырылады: [a, b] кесіндіде дифференциалдық теңдеудің шешімін табу керек болсын [4] (түсінікті болу үшін екінші ретті жай дифференциалдық теңдеуге мысалдар келтіреміз):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'), \text{ шекті шарттарда } y(a) = A,\ y(b) = B. \tag{6}$$

Осы жағдайда *a* нүктесіндегі бастапқы жетіспейтін шарттарды табу үшін, *MathCad sbval* функциясын пайдалануды ұсынады.

| | |
|---|---|
| Sbval (v, a, b, D, load, score) | *a* нүктесіндегі бастапқы жетіспейтін векторды қайтарады. *V* вектор бастапқы жуықтауларды береді; *a, b* — шешімдердің интервалының шекті нүктелері; *D* (*x, y*)-функция — белгісіз функциялардың бірінші туындылары бар вектор; *load* (*a, v*) — функция-вектор, *a* нүктесіндегі бастапқы шартты қанағаттандыратын мәнді қайтарады. *score* (*b, y*) — *b* нүктесінің бастапқы шартында әрбір элементі айырмашылықта және ізделіп отырған шешімі бұл нүктеде болатын функция-вектор |

Осыдан жетіспейтін бастапқы шарттар алынғаннан кейін, жоғарыда айтылған кез келген фукцияны қолданып (1-сур.), кәдімгі бастапқы шарттардағы есепті шешуге болады, яғни Коши есебін [5]. Шектік есептің шешімінің мысалы 2-суретте көрсетілген.




2-сур. Шектік есепті шешу

*Сызықтық дифференциалдық теңдеулердің нышандық шешімі*

Егер сіз MathCad 5.0 пакетімен жұмыс істесеңіз, нышандық процессордың жүктелулері үшін бастапқы *Symbolic Load Symbolic Processor* командаларын орындауды ұмытпаңыз, егер сіз MathCad 6.0 пакетімен жұмыс істеу білсеңіз, бұл пункті тастап кетіңіз [6]. MathCad-қа сызықтық аналитикалық шешімдерді алу үшін келесі әрекеттерді орындау керек: дифференциалдау операторы мен пернелер комбинациясын қолдана отырып, бастапқы теңдеуді басып шығару [Ctrl]=; тәуелсіз айнымалыны белгілеп, Лапластың тура өрнектеуін орындау *Symbolic Transforms Laplace Transform (Лапластың өрнектеуі)*. Жай дифференциалдық теңдеудің нәтижесі алмасу буферінде орналастырылады. Оны F4 пернесін басып шақырыңыз; Лапластың өрнектеулері нәтижелер бойынша алгебралық теңдеуді қолдан құрау, *L=laplace* (*y* (*t*), *t, s)*, *C*1*= y* (0) и *C*2*=diff* (*y* (0), 0) белгісін қабылдап, *Symbolic Solve for Variable* (*Айнымалы туралы шешу*) командасын қолдана отырып, *L* айнымалысына қатысты жасалған алгебралық теңдеуді шешуге болады.

## References


1. *Atanbayev C., Sultangazin O.* Short theory of calculation methods. — Almaty: Bilim, 2001. — P. 36–67.
2. *Gurskyi D., Turbina E.* Calculations in Mathcad 12. — SPb.: Peter, 2006. — P. 476–490.
3. *Hanova A.A.* Symbolical calculation in the environment of MathCAD. — Astrakhan: Publishing house ASTU, 2001. — 34 p.
4. *Hanova A.A.* Numerical solution of equations and systems. — Astrakhan: Publishing house ASTU, 2001. — 44 p.
5. *Zubkov V.G., Lyahovsky V.A. et al.* Course of the higher matematics. — 6 theed. — M.: MSIU, 2003. — 483 p.
6. *Dyakonov V.P.* Manual on MathCad PLUS 6.0 PRO. — M.: SK Press, 1997. — 336 p.