УДК 510.67

А.Р.Ешкеев, Б.Ш.Алимова, М.Б.Битимхан

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: modth1705@mail.ru)

Классификация Δ-*PM*-теорий по Δ-*PM*-косемантичности в допустимых обогащениях сигнатуры

В статье рассмотрено обогащение сигнатуры позитивных йонсоновских теорий. Основной задачей является классификация позитивных йонсоновских теорий и их классов позитивных экзистенциально замкнутых моделей. Авторами предложена классификация рассматриваемых теорий в рамках позитивной косемантичности теории и моделей. Получены условия позитивной элементарной эквивалентности для различных классов позитивных йонсоновских теорий.

Ключевые слова: йонсоновские теории, косемантичность моделей и теорий, центральные типы позитивных йонсоновских теорий, обогащения сигнатуры.

В теории моделей существует условное разделение на два основных направления. В известной монографии «Справочная книга по математической логике» [1] крупный специалист Дж.Кейслер выделяет эти направления как «восточное и западное». Условность такого обозначения заключается в том, что одни из основоположников теории моделей — Абрахам Робинсон и Альфред Тарский жили и творили в своё время, соответственно, на восточном и западном побережьях США. Проблематика исследований «восточного характера» восходила к классическим задачам алгебры, а проблематика исследований «западного характера» относилась к задачам математического анализа и теории чисел. Естественно, оба направления теории являются актуальными по своим задачам, но между ними есть существенная разница в используемой технике исследования. Если задачи «западной» теории моделей связаны с исследованиями в полных теориях, то задачи «восточной» теории моделей, как правило, имеют дело с неполными теориями. Понятно, что в случае неполноты теории применяемый технический аппарат по своей сути гораздо слабее, чем в случае полных теорий. Но тем не менее теория моделей едина и имеет своей целью общую задачу описания на языке математической логики, исчисления предикатов первого порядка — описать структурные свойства рассматриваемых математических объектов. Под объектами, как правило, понимаются структуры (модели сигнатуры) или модели рассматриваемой теории. Поэтому основополагающие идеи в теории моделей являются общими для обоих направлений. К таким идеям можно отнести идею форсинга, ультрапроизведений, свойства амальгамы, свойства совместного вложения, свойства опускания типа, конструирование различных видов моделей, стабильности, форкинга и т.д. Но при этом всё, что приемлемо и естественно в полном случае, необходимо доопределять в неполном случае и эти трудности здесь возникают не только из-за этого, но и из-за проблем теоретико-множественного характера. Более того, практически все теоремы «восточного» характера появились позже своих «западных» аналогов. В 80-х гг. прошлого века казахстанским математиком профессором Т.Г.Мустафиным была решена проблема сведения вопросов «восточной» теории к «западной». Им были введены так называемые обобщенные йонсоновские теории, которые при соответствующих значениях определенных параметров задания теории давали её «восточные» и «западные» атрибуты. При таком подходе Т.Г.Мустафиным были описаны все типы теорий булевых алгебр.

При исследовании неполных теорий интересным естественным ограничением является рассмотрение индуктивных теорий, задаваемых универсально, экзистенциальными аксиомами (предложениями) языка первого порядка. В частности, в силу известного факта [1] такие теории замкнуты относительно объединения цепей. Если к рассматриваемым теориям мы добавим естественные условия амальгамы и совместного вложения, то мы оказываемся в рамках исследований так называемых йонсоновских теорий. К классу йонсоновских теорий относятся такие теории, как теория групп, теория абелевых групп, теория полей фиксированной характеристики, теория булевых алгебр, теория порядков, теория различных видов колец, теория полигонов и т.д. Как видим, этот список достаточно широкий и его представители являются классическими примерами алгебр, которые широко используются в различных областях математики. В связи с исследованиями йонсоновских теорий были получены многие результаты, которые были перенесены из «западной» теории моделей. Достаточно полный обзор можно найти в [2].

В связи с серией работ Бен-Якоба [3, 4] по позитивной теории моделей одним из авторов данной статьи были введены и рассмотрены различные классы позитивных йонсоновских теорий (см. [2]). Все эти позитивные нововведенные классы $(\Delta - PJ, \Delta - PM, \Delta - PR)$ -теорий соответственно Δ-позитивно йонсоновские, Δ-позитивно мустафинские, Δ-позитивно робинсоновские тесно связаны с рассмотренными выше теориями. При соответствующих заданиях параметров Δ и рассматриваемых морфизмов этих теорий мы получаем йонсоновские и обобщенно-йонсоновские теории, а также, в частности, некоторые позитивные фрагменты в смысле [3, 4]. Существенным является тот факт, что существуют примеры теорий, которые не йонсоновские, но они, например метрические пространства, удовлетворяют условиям некоторых позитивных классов теорий ($\Delta = \Delta_0$, как в [3, 4]).

Основной задачей теории моделей является классификация двух понятий — теории и класса её моделей. Модели фиксированной теории между собой классифицируются различными способами, например, изоморфизм, элементарная эквивалентность. Такой подход обычно рассматривается для полных теорий. В случае неполных теорий (а йонсоновские теории в общем случае таковыми и являются) понятие элементарной эквивалентности двух моделей было обобщено Т.Г.Мустафиным на понятии йонсоновской эквивалентности, рассмотренной в [5]. Причем на основе этого понятия авторами в [6] были рассмотрены понятия косемантичности моделей и теорий, когда эти теории йонсоновские. В дальнейшем одним из авторов этой статьи были получены аналогичные результаты и для $\Delta - PJ$ – теорий в [7].

Данная статья связана с обогащением сигнатуры. В своё время при изучении стабильности теории и понятия элементарной пары моделей Т.Г.Мустафиным было замечено, что эти вещи между собой связаны и он ввел понятие T*-стабильности [8].

На самом деле при этом рассматривается некоторое обогащение сигнатуры. Вообще говоря, полученные теории в расширенном языке неполны, поэтому ищется число таких пополнений этих теорий. Вот это число и определяло стабильность в смысле T*-стабильности. Е.А.Палютиным в работе [9] было замечено, что понятие T*-стабильности не инвариантно относительно определимости типа. Но мы знаем, что в классическом смысле С.Шеллаха стабильность теории инвариантна относительно определимости типа. Поэтому Е.А.Палютиным было введено понятие E*-стабильности, которое сохраняло определимость типа. Указанные выше определения относительно стабильности в точности относятся к «западной» теории моделей, так как рассматриваемые теории являлись полными.

В дальнейшем одним из авторов данной статьи [2] была рассмотрена данная постановка задачи для йонсоновских теорий. Назовём в классе йонсоновских теорий или в позитивных йонсоновских теориях $(\Delta - PJ, \Delta - PM, \Delta - PR)$ обогащение сигнатуры допустимым, если получаемая стабильность в рассматриваемом случае будет инвариантна относительно определимости типа. В данной статье все рассматриваемые обогащения являются допустимыми. Пусть обогащение будет следующим: $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$, где P — символ одноместного предиката; c — символ новой константы.

Опишем необходимые атрибуты позитивности в нашем смысле [2]. Пусть L — язык первого порядка; At есть множество атомарных формул данного языка; $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных; $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At)) = L^+$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+.

Следуя [3, 4], определим Δ-морфизмы между структурами.

Пусть M и N — структуры языка, $\Delta \subseteq B(L^+)$. Отображение $h: M \to N$ называется Δ-гомоморфизмом (символически $h: M \underset{\Delta}{\to} N$), если для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta, \forall \bar{a} \in M$ из того, что $M \models \varphi(\bar{a})$, следует, что $N \models \varphi(h(\bar{a}))$. Следуя [4, 5], модель M называется началом в N и мы говорим, что M продолжается в N, при этом *h (M)* называется продолжением M. Если при этом верно и обратное, т.е. для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta, \forall \bar{a} \in M$ $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(h(\bar{a}))$, то говорят, что отображение h погружает M в N (символически $h: M \underset{\Delta}{\leftrightarrow} N$). В дальнейшем мы будем использовать термин Δ-продолжение и Δ-погружение. В рамках этого определения (Δ-гомоморфизма) легко заметить, что изоморфное и элементарное вложения являются Δ-погружениями, когда $\Delta = B(At)$ и $\Delta = L$, соответственно.

Определение 1 (универсальная область) [3, 4].

Пусть κ — относительно большой кардинал (как минимум $\kappa > |\Delta|$) и U — структура языка L. Тогда U является κ-универсальной областью, если она удовлетворяет следующим свойствам:

1) κ-однородность: Пусть $f : U \dashrightarrow U$ — частичный эндоморфизм U, и предположим, что $|dom(f)| < \kappa$. Тогда f расширяется до автоморфизма U;

2) κ-компактность: Пусть $\Gamma \subset \Delta$ такое, что $|\Gamma| < \kappa$, и предположим, что каждое конечное подмножество множества Γ реализуемо в U. Тогда Γ реализуемо в U.

Определение 2 *(Δ-JEP)* [2].

Говорим, что теория T допускает Δ-JEP, если для любых двух $A, B \in ModT$ существует $C \in ModT$, и Δ-гомоморфизмы $h_1 : A \underset{\Delta}{\to} C, h_2 : B \underset{\Delta}{\to} C$.

Определение 3 *(Δ-AP)* [2]. Говорим, что теория T допускает Δ-*AP*, если для любых $A, B, C \in ModT$ таких, что $h_1 : A \underset{\Delta}{\to} C, g_1 : A \underset{\Delta}{\to} B$, где h_1, g_1 — Δ-гомоморфизмы, существует $D \in ModT$ и $h_2 : C \underset{\Delta}{\to} D, g_2 : B \underset{\Delta}{\to} D$, где h_2, g_2 — Δ-гомоморфизмы, такие что $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$.

Определение 4 [2]. Теория T называется Δ-позитивной йонсоновской (Δ-*PJ*) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) T имеет бесконечную модель;
2) T позитивно $\forall\exists$-аксиоматизируема;
3) T допускает Δ-*JEP*;
4) T допускает Δ-*AP*.

В связи с допустимыми обогащениями раннее одним из авторов данной статьи было введено понятие центрального типа. На языке центральных типов транслируются многие теоремы, полученные до обогащения сигнатуры. В данной статье мы рассмотрим аналогичные вопросы для центральных типов позитивных обобщений йонсоновских теорий. В случае Δ-*PJ*-теории мы имеем следующие определения в связи с обогащением сигнатуры.

Пусть T есть произвольная $\Delta - PJ$-теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$ $T_\Gamma^{PJ}(A) = Th_{\forall\exists^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ. Рассмотрим все пополнения теории T^* для теории T в языке сигнатуры σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. Так как T^* является $\Delta - PJ$-теорией, она имеет свой центр и мы обозначим его через T^c. При ограничении теории T^c до сигнатуры σ теория T^c становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории T. Заметим, что все семантические модели элементарно эквивалентны между собой. В силу этого и совершенности теории определение центрального типа корректно. В данной статье нет утверждений на языке центральных типов для Δ-*PJ*-теорий, но центральные типы будут рассмотрены для другого класса теорий, связанного с классом $\Delta - PJ$-теорий. Для того, чтобы проследить как связаны эти классы, и даны определения центрального типа в обоих случаях.

Определение 5. Пусть A — некоторая бесконечная модель сигнатуры σ. A называется Δ-*PJ*-моделью, если множество предложений $T_\Gamma^{PJ}(A)$ является Δ-*PJ*-теорией в обогащённом языке.

Обозначение. Теорию $T_\Gamma^{PJ}(A)$ будем обозначать через $\forall\exists^+(A)$.

Следующий результат обобщает предложение 1 из [6] и лемму 9 из [7].

Лемма 1. Пусть T — Δ-*PJ*-теория, полная для экзистенциальных предложений в обогащении $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Тогда любая бесконечная модель теории центра теории T является Δ-*PJ*-моделью.

Доказательство. В случае если теория T является йонсоновской, то это следует из того факта, что позитивная оболочка Кайзера T^0 для T является йонсоновской, где T^0 есть $Th_{\forall\exists}{}^+(C)$; C — семантическая модель T, а интерпретации символов P и c не портят йонсоновости, потому что при соответствующих рассматриваемых морфизмах для Δ-*JEP* и Δ-*AP* реализации символов P и c переходят в соответствующие образы, так как роль P играет экзистенциально замкнутая подмодель, а константа переходит в константу. В случае если теория T не является йонсоновской, то в качестве семантической модели рассмотрим универсальную область из [3, 4]. Рассуждения о максимальности позитивной оболочки Кайзера переносятся полностью на универсальную область.

Определение 6. Модели A и B называются Δ-*PJ*-эквивалентными, если для любой Δ-*PJ*-теории T $A \models T \Leftrightarrow B \models T$, и обозначаются через $A \equiv^{\Delta}_{PJ} B$.

Следующий результат обобщает теорему 1 из [6].

Лемма 2. Пусть A и B — модели сигнатуры $\sigma_{\Gamma}(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $A \equiv^{\Delta}_{PJ} B$;

2) $\forall\exists^{+}(A) = \forall\exists^{+}(B)$.

Доказательство. В йонсоновском случае доказательство следует из [6]. В остальных случаях легко получить с помощью леммы 1 позитивные обобщения этого доказательства.

Определение 7. Две Δ-*PJ*-теории T_1 и T_2 называются Δ-*PJ*-косемантичными $T_1 \rhd\lhd^{\Delta}_{PJ} T_2$, если они имеют общую семантическую модель, в случае, когда T_1 и T_2 — йонсоновские теории и имеют общую универсальную область в случае, когда они не йонсоновские.

Определение 8. Модели A и B модели сигнатуры σ называются Δ-*PJ*-косемантичными $A \rhd\lhd^{\Delta}_{PJ} B$, если для любой Δ-*PJ*-теории T_1 такой, что $A \models T_1$, найдется Δ-*PJ*-теория T_2, Δ-*PJ*-косемантичная с T_1, такая что $B \models T_2$. И наоборот.

Для любых моделей A и B верны следующие импликации:

$$A \equiv B \Rightarrow A \equiv^{\Delta}_{PJ} B \Rightarrow A \rhd\lhd^{\Delta}_{PJ} B.$$

Следующая договоренность является очень важной. Фактически мы будем говорить о семантическом аспекте Δ-*PJ*-теории. Если Δ-*PJ*-теория T является йонсоновской, то с Mod T мы работаем как с классом моделей некоторой йонсоновской теории. Если же Δ-*PJ*-теория T не является йонсоновской, то в качестве $\mathrm{Mod}\,T$ мы будем рассматривать класс её позитивно экзистенциально замкнутых моделей E_T^{+}. Такой подход для класса E_T-класса экзистенциально замкнутых моделей произвольной универсальной теории T был рассмотрен в [9]. Так как относительно йонсоновских теорий возможны два случая: совершенный и несовершенный, то мы будем придерживаться следующего. Хорошо известно из [2], что если йонсоновская теория T совершенна, то класс её экзистенциально замкнутых моделей E_T элементарен и совпадает с $\mathrm{Mod}\,T^*$, где T^* — её центр. В противном случае, т.е. если теория T несовершенна, мы поступаем как в [7], т.е. вместо Mod T работаем с классом E_T^{+}. Когда рассматривается произвольная Δ-*PJ*-теория T, то класс E_T^{+} рассматривается как расширение класса E_T (оба класса всегда существуют), и, в зависимости от совершенности и несовершенности теории T, теоретико-модельные свойства класса E_T^{+} представляют особый интерес.

Лемма 3. Пусть T_1^* и T_2^* — соответствующие центры теорий T_1 и T_2 и являются Δ-*PJ*-теориями в $\sigma_{\Gamma}(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Причем C_1 — семантическая модель T_1; C_2 — семантическая модель T_2. Если $(T_1^*)_{\forall^+} = (T_2^*)_{\forall^+}$, то $T_1^* \rhd\lhd^{\Delta}_{PJ} T_2^*$.

Доказательство. В йонсоновском случае из того, что позитивно универсальные следствия T_2 и T_1 совпадают, следует, что они модельно совместны. Соответственно, семантическая модель T_1 является моделью T_2 и семантическая модель T_2 является моделью T_1. Далее мы применяем позитивное обобщение доказательства из [1] с помощью лемм 1, 2.

В нейонсоновском случае достаточно заметить, что если в качестве семантических моделей рассматривать универсальные области, определенные выше, то легко заметить, что они являются позитивно экзистенциальными моделями в смысле [3, 4]. А так как, в силу замечания о семантическом аспекте Δ-*PJ*-теорий, мы работаем в нейонсоновском случае с моделями из E_T^+ и все продолжения становятся погружениями, мы можем без труда повторить доказательство, аналогичное йонсоновскому случаю.

Теорема 1. Пусть T_1^* и T_2^*, как в условии леммы 3, являются Δ-*PJ*-теориями, причем C_1 — семантическая модель T_1; C_2 — семантическая модель T_2. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $C_1 \rhd\lhd_{PJ}^{\Delta} C_2$;

2) $C_1 \equiv_{PJ}^{\Delta} C_2$;

3) $C_1 = C_2$.

Доказательство. Аналогично лемме 3 рассмотрим два случая. В йонсоновском случае повторяем доказательство из [6] лишь только с той разницей, что Δ замкнуто относительно позитивных булевых комбинаций и фиксировано как выше. В нейонсоновском случае C_1 заменяется на U_1 и C_2 заменяется на U_2, где U_1 и U_2 — универсальные области, соответственно, для T_1 и T_2. Тогда указанное выше утверждение следует из того, что $U_1 \in E_{T_1}^+$ и $U_2 \in E_{T_2}^+$. И остается применить замечание о семантическом аспекте Δ-*PJ*-теорий.

Следующий результат обобщает теорему 4 из [6].

Теорема 2. Пусть A и B — Δ-*PJ*-модели сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $A \rhd\lhd_{PJ}^{\Delta} B$;

2) $\forall\exists^+(A) \rhd\lhd_{PJ}^{\Delta} \forall\exists^+(B)$.

Доказательство. В йонсоновском случае, как в предыдущей теореме, достаточно рассмотреть позитивное обобщение доказательства из [6] в смысле, что Δ замкнуто относительно позитивных булевых комбинаций и фиксировано как выше. В нейонсоновском случае, в силу условия теоремы, следует, что множество предложений $Th_{\forall\exists^+}(A)$ и

$$Th_{\forall\exists^+}(B) \text{ из } T_\Gamma^{PJ}(A) = Th_{\forall\exists^+}(C,a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$$

в обогащённом языке являются Δ-*PJ*-теориями. Тогда для них можно применить замечание о семантическом аспекте Δ-*PJ*-теорий.

В [7] был введен класс теорий, который в пересечении с классом йонсоновских теорий, обобщает его, а также содержит обобщенные йонсоновские теории, введенные в [5]. Интересно далее перенести полученные результаты на эти теории, а также увидеть связь с центральными типами при рассматриваемом обогащении.Напомним определение этого класса.

Определение 9. Теория T называется Δ-позитивно мустафинской (Δ-PM)-теорией, если

1) теория T имеет бесконечные модели;

2) теория T является Π_{n+2}^+-аксиоматизируемой;

3) теория T допускает Δ-JEP;

4) теория T допускает Δ-AP.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π_n^+ — множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists\ldots\varphi$ (т.е. формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Sigma_{n+1}^+ \subseteq L^+$.

Дадим необходимые определения, связанные с обогащением сигнатуры Δ-PM-теории. Пусть T есть произвольная Δ-PM — теория в языке первого порядка сигнатуры σ.

Пусть C является семантической моделью теории T; $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Пусть $T_\Gamma^{PM}(A) = Th_{\Pi_{\alpha+2}^+}(C,a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ.

Рассмотрим все пополнения центра T^* теории Δ-PM в новой сигнатуре Δ-PM, где T. Следующий факт позволяет работать с позитивными обобщениями йонсоновских теорий в обогащённой сигнатуре. Заметим (*) (взято из [7]), что если теория Δ-PM σ-йонсоновская, то в обогащенном языке относительно условий теоремы, центр T^* будет таким же, т.е. T-теорией. Это достигается следующим образом: константы будут переходить в образы констант, реализация предиката — в образ реализации. Необходимые образы получаются за счет соответствующих отображений, которые нам обеспечивают условия σ_Γ и $\Gamma = \{c\}$ из Δ-PM -йонсоновости изначальной теории T^*. Далее, в силу того, что по условию T^c совершенна как α -йонсоновская теория, то T^c является σ-теорией.

Тогда существует ее центр и он является одним из пополнений теории T^c в обогащенном языке. Этот центр мы обозначим как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ-теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовем центральным типом теории T.

Сформулируем результаты о косемантичности для позитивных мустафинских теорий в обогащенной сигнатуре.

Пусть $m \leq \omega$; $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$.

Теорема 3. Пусть T_1^* и T_2^* — σ- теории; C_1 — семантическая модель T_1; C_2 — семантическая модель T_2. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $C_1 \rhd\lhd_{PM}^{\Delta} C_2$;

2) $C_1 \equiv_{PM}^{\Delta} C_2$;

3) $C_1 = C_2$.

Доказательство. Данное утверждение есть σ-аналог теоремы 1.

Рутинное доказательство по индукции на кванторы с длиной индукции по четному *к*, где *к* — число перемен кванторов. Четное, потому что рассматриваются блоки $\forall\exists$ длины 2.

Теорема 4. Пусть A и B — σ-модели T^c-теории. Тогда эквиваленты, следующие условия:

1) $A \rhd\lhd_{PM}^{\Delta} B$;

2) $\forall\exists_m^+(A) \rhd\lhd_{PM}^{\Delta} \forall\exists_m^+(B)$.

Доказательство. Данное утверждение есть σ-аналог теоремы 2. Оно следует из указанных выше теорем 2 и 4.

Все необходимые неопределенные в данной статье определения и используемые без доказательств результаты можно найти в [2].

Список литературы

1 *Barwise J., ed*. Handbook of Mathematical Logic [Russian translation]. — Vol. 1. — Model Theory. Moscow: Nauka, 1982.

2 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

3 *Itay Ben-Yaacov*. Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. 3. — 2003. — № 1. — P. 85–118.

4 *Itay Ben-Yaacov*. Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic logic. — 2005. — Vol. 11. — № 1. — P. 28–50.

5 *Мустафин Т.Г.* Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические труды. — 1998. — Т. 1. — № 2. — С. 135–197.

6 *Mustafin E., Nurkhaidarov E.* Jonsson equivalent and cosemantical models // QuatriemeColloque Franco-Touranien de Theorie des Modeles. Resumes des Conferences. — Marseille, 1997. — P. 13–15.

7 *Ешкеев А.Р.* Классификация Δ-*PJ*-теорий по Δ-*PJ*-косемантичности и связь с их атомными и простыми моделями // Бюллетень КазНУ. — 2008. — № 4 (59). — С. 10–17.

8 *Мустафин Т.Г.* Новые понятия стабильности теорий // Тр. Советского-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. — С. 112–125.

9 *Палютин Е.А*. *Е**-стабильные теории // Алгебра и логика. — 2003. — № 2. — 42. — С. 194–210.

А.Р.Ешкеев, Б.Ш.Әлімова, М.Б.Бітімхан

Байытуға рұқсат етілген сигнатурада косемантикалылық бойынша Δ-*PM*-теориялардың классификациясы

Мақалада позитивті йонсондық теориялардың сигнатурасының байытуы қарастырылған. Позитивті йонсондық теориялар мен олардың позитивті экзистенционалды тұйық модельдер кластарын классификациялау негізгі мақсат болып табылды. Авторлар бул классификацияны модельдер және теориялардың позитивті косемантикалылығының аясында ұсынды. Позитивті йонсондық теориялардың әр түрлі кластары үшін позитивті элементарлық эквиваленттілік шарттары алынды.

A.R.Yeshkeyev, B.Sh.Alimova, M.B.Bitimkhan

The classification of the Δ-*PM* theories by Δ-*PM* cosemanticness in the admissible enrichment of the signature

In this article we considered the enrichment of the signature of positive Jonsson theories. The main objective is the classification of positive Jonsson theories and classes of positive existentially closed models. It is proposed to classify the theory under consideration as part of the positive cosemanticness theories and models. Conditions are obtained for the positive elementary equivalence for different classes of positive Jonsson theories.

References

1 Barwise J. ed. *Handbook of Mathematical Logic [Russian translation]*, vol. 1, Model Theory, Moscow: Nauka, 1982.

2 Yeshkeyev A.R. *Jonsson theory*, Karaganda: Publ. KSU, 2009, p. 250.

3 Itay Ben-Yaacov. *Positive model theory and compact abstract theories* // Journal of Mathematical Logic, 2003, 3, № 1, p. 85–118.

4 Itay Ben-Yaacov. *Compactness and independence in non first order frameworks* // Bulletin of Symbolic logic. 2005, vol. 11, № 1, p. 28–50.

5 Mustafin T.G. *Generalized Jónsson Conditions and a Description of Generalized Jónsson Theories of Boolean Algebras* // Mat. Tr., 1998, vol. 1, p. 135–197.

6 Mustafin E., Nurkhaidarov E. *Jonsson equivalent and cosemantical models* // QuatriemeColloque Franco-Touranien de Theorie des Modeles. Resumes des Conferences, Marseille, 1997, p. 13–15.

7 Yeshkeyev A.R. *Classification of* $\Delta - PJ$ *-theory of* $\Delta - PJ$ *-cosemanticness and their relation to atomic and simple models* // Bulletin of the KNU, 2008, № 4 (59), p. 10–17.

8 Mustafin T.G. *New concepts of stability for theories, in: Proc. Soviet-French Colloq. on Model Theory,* Karaganda, Publ. KSU 1990, p. 112–125.

9 Palyutin E.A. *E*-stable theories* // Algebra and logic, 2003, № 2, 42, p. 194–210.