

## References

- 1 Itai Ben Yaacov, Bruno Poizat. *The Journal of Symbolic Logic* 72. — 2007. — P. 1141–1162.
- 2 Itay Ben-Yaacov. *Journal of Mathematical Logic* 3. — 2003. — No. 1. — P. 85–118.
- 3 Bruno Poizat. *Annals of Pure and Applied Logic* 161. — 2010. — P. 812–816.
- 4 Bruno Poizat. *The Journal of Symbolic Logic* 71. — 2006. — P. 969–976.

Б.Пуза

**Позитивті логиканың негіздері**

Мақаланың басты мақсаты — позитивті логиканың негізгі ұғымдарын беру. Бұл жұмыстың мазмұны академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университетінде 2013 жылдың сәуір–мамыр айларында мен оқыған дәріс курсының квинтэссенциясы болып табылады.

Б.Пуза

**Основы позитивной логики**

Основная цель статьи — дать основные понятия позитивной логики. Содержание данной работы есть квинтэссенция курса лекций, прочитанных мною в Карагандинском государственном университете имени академика Е.А.Букетова в апреле–мае 2013 года.

UDC 517.927.5

N.S.Imanbayev

*Kh.A.Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan (E-mail: imanbaevnur@mail.ru)*

**On the stability and instability of the basis properties of root functions of the Schrödinger equation with nonlocal perturbations of boundary condition**

In paper Samarsky-Ionkin spectral problem for the Schrodinger equation with an integral perturbation in the boundary conditions is considered. It is assumed that the unperturbed problem has a system of eigenfunctions forming Riesz basis in  $L_2(0,1)$ . It is shown that the basis property of the systems of root functions of a problem can be varied under any arbitrarily small variation of the kernel of the integral perturbation.

*Key words:* a singularly perturbed problem, integral-differential equation, regularization of the problem, iterative task, the asymptotic convergence.

We consider the operator  $L_1$ , defined by the differential expression

$$L_1 u = -u'' + q(x)u = \lambda u, \dot{x} \in (0,1), q(x) \in C[0,1] \quad (1)$$

and regular but not strongly regular boundary conditions [1] with an integral perturbation

$$U_1(u) \equiv a_{11}u'(0) + a_{12}u'(1) + a_{13}u(0) + a_{14}u(1) = 0;$$

$$U_2(u) \equiv a_{23}u(0) + a_{24}u(1) = \int_0^1 \overline{P(x)}u(x)dx, P(x) \in L_2(0,1). \quad (2)$$

Here  $U_j(u)$  are the independent linear forms with complex constant coefficients satisfying the conditions of unboosted regularity

$$|a_{11}| + |a_{12}| \neq 0, a_{11}a_{24} + a_{12}a_{23} = \pm[a_{11}a_{23} + a_{12}a_{24}] \neq 0.$$

In the paper [2] it is proved that the system of eigenfunctions and associated functions (E@AF) of (1), (2) forms Riesz basis with parentheses for any integral perturbation of boundary conditions, and with strong regularity of the boundary conditions E@AF form a Riesz basis. In the particular case of the integral perturbation of periodic boundary conditions for the operator of multiple differentiation instability of basis property E@AF were investigated in paper [3].

We note that in [4] the stability issues of the basis properties of the periodic problem for the loaded equation with the load of form  $p(x)v(0)$  were studied.

There is the following theorem

*Theorem 1.* Let the unperturbed operator  $L_0$  (when  $p(x) \equiv 0$ ) has eigenvalues  $\lambda_k^0$  and E@AF forming Riesz basis in  $L_2(0,1)$ . Then the characteristic determinant of the operator  $L_1$  with perturbed regular boundary conditions (2) is represented as

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k0}} \left[ \frac{V_3(v_{k0})}{\lambda - \lambda_k^0} - \frac{\sqrt{\lambda_k^0 V_3(v_{k1})}}{(\lambda - \lambda_k^0)^2} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k1}} \frac{V_3(v_{k1}^0)}{\lambda - \lambda_k^0} \right), \quad (3)$$

where  $\Delta_0(\lambda)$  is the characteristic determinant of the operator  $L_0$ ;  $V_3(v)$  are homogeneous linear forms that occur in the construction of the boundary conditions of the adjoint unperturbed problem  $L_0^*$ ;  $\{v_{k1}^0, v_{k0}^0\}$  are E@AF of the adjoint unperturbed problem;  $a_{k1}, a_{k0}$  are Fourier coefficients of the bi-orthogonal decomposition of the function  $\overline{p(x)}$  under this system

$$\overline{p(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} [\overline{a_{k1}} v_{k1}^0 + \overline{a_{k0}} v_{k0}^0]. \quad (4)$$

By virtue of the obtained representation of the characteristic determinant of (1), (2) we will obtain the asymptotic behavior of the eigenvalues, and we can draw conclusions about the stability or instability of the basis property of the system E@AF for different cases of the unfortified regularity of the boundary conditions.

Let us assume, as an example it is the perturbed Samarsky–Ionkin problem for operator of multiple differentiation, that is, when  $q(x) \equiv 0$ ,

$$u'(0) = u'(1), u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx; \quad (2a)$$

$$u'(0) = u'(1) + \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, u(0) = 0, \quad (2b)$$

when  $p(x) \in L_2(0,1)$ .

One of the features of these problems is the fact that adjoint problem to (1)–(2a) and (1)–(2b) are the spectral problem for the loaded differential equations

$$l^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \bar{\lambda}v(x), V_1(v) \equiv v'(1) = 0, V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0; \quad (2a^*)$$

$$l^*(v) = -v''(x) + p(x)v(0) = \bar{\lambda}v(x), V_1(v) \equiv v'(1) = 0, V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0. \quad (2b^*)$$

The characteristic determinant of the problem (1)–(2a) is

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot \left[ 1 + 4\sqrt{2}\pi \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k0}} \cdot \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2} \right], \quad (3a)$$

the characteristic determinant of the problem (1)–(2b) is

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot \left[ 1 - 4\sqrt{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \overline{\pi a_{k0}} \frac{k}{[\lambda - (2k\pi)^2]^2} + \overline{a_{k1}} \cdot \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2} \right) \right], \quad (3b)$$

when

$$\Delta_0(\lambda) = 1 - \cos \sqrt{\lambda},$$

$$\overline{p(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k0}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (1-x) \cdot \sin 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k1}} \cdot 4\sqrt{2} \cos 2k\pi x. \quad (4a,b)$$

The function  $\Delta_1(\lambda)$  represented by the formula (3a) and (3b) is an entire function the variable  $\lambda$ .

From formula (3a) we have two series of eigenvalues of the perturbed problem (1)–(2a)

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_k^0 = (2k\pi)^2; \lambda_k^{(2)} = \left[ 2k\pi + a_{k0} \left( \sqrt{2} + 0 \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) \right]^2.$$

We note that systems E@AF of the perturbed problems (1)–(2a), (1)–(2b), and the system E@AF of the unperturbed Samarsky–Ionkin problem (forming Riesz basis) differ from each other only by a finite number of the first members. Consequently, the systems E@AF of the perturbed problems (1)–(2a), (1)–(2c) also form Riesz basis in  $L_2(0,1)$ .

The set of functions  $p(x)$  that can be represented as a series (4ab) is dense one in  $L_2(0,1)$ .

*Theorem 2.* The set of functions  $p(x) \in L_2(0,1)$ , such as systems E@AF of the perturbed problems (1)–(2a) and (1)–(2b) form Riesz basis in  $L_2(0,1)$  is dense one in  $L_2(0,1)$ .

Obviously, the set of functions  $p(x) \in L_2(0,1)$  that can be represented as a series (4ab), whose coefficients are asymptotically (that is, starting from some number) have the property  $a_{k0} = 0, a_{k1} \neq 0$  will be dense one in  $L_2(0,1)$ . Hence to prove the theorem it is sufficient to show that for such functions  $p(x)$  the system E@AF of the problem does not form the usual basis.

Let  $j$  is the large enough number, so that  $a_{j0} = 0, a_{j1} \neq 0$ . Then from (3a) it is not difficult to see that  $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$  is the single eigenvalue of the problem (1)–(2a). By direct computation it is easy to obtain that  $u_{j0}(x) = \sqrt{2} \sin 2j\pi x$  is the eigenfunction of the spectral problem (1)–(2a) corresponding to this eigenvalue and  $\|u_{j0}(x)\|^2 = 1$ .

Let us find eigenfunction of the adjoint problem (2a\*) corresponding to eigenvalue  $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ . Presenting the general solution of the loaded differential equation from (2a\*) when  $\bar{\lambda} \neq 0$  by the formula

$$v(x) = C_1 \cos \sqrt{\bar{\lambda}}x + C_2 \sin \sqrt{\bar{\lambda}}x + v(0) \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(\sqrt{\bar{\lambda}}(x-\xi)) d\xi}{\sqrt{\bar{\lambda}}}$$

and satisfying its boundary conditions (4), we obtain a linear system for the coefficients  $C_k$

$$\begin{cases} \left[ -\sqrt{\bar{\lambda}} \sin \sqrt{\bar{\lambda}} + \sqrt{\bar{\lambda}} \int_0^1 p(\xi) \cos \sqrt{\bar{\lambda}}(1-\xi) d\xi \right] C_1 + \sqrt{\bar{\lambda}} \cos \sqrt{\bar{\lambda}} C_2 = 0, \\ \left[ 1 - \cos \sqrt{\bar{\lambda}} - \int_0^1 p(\xi) \sin \sqrt{\bar{\lambda}}(1-\xi) d\xi \right] C_1 - \sin \sqrt{\bar{\lambda}} C_2 = 0. \end{cases}$$

When  $\bar{\lambda} = \lambda_j^0 = (2j\pi)^2$  we have

$$\begin{cases} C_1 \int_0^1 p(\xi) \cos 2j\pi\xi d\xi + C_2 = 0; \\ C_1 \int_0^1 p(\xi) \sin 2j\pi\xi d\xi = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Computation the integrals appearing in (5) gives

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(\xi) \cos 2j\pi\xi d\xi &= 2\sqrt{2}a_{j1} + \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\sqrt{2}}{\pi} a_{k1} \frac{k}{k^2 - j^2}, \text{ when } j > N; \\ \int_0^1 p(\xi) \sin 2j\pi\xi d\xi &= \frac{\sqrt{2}}{2} a_{j0} = 0, \text{ when } j > N. \end{aligned}$$

From Young's theorem 5; [theorem 276] it follows that  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \frac{k}{j^2 - k^2} = O\left(\frac{1}{j^2}\right)$ . From system

(5) expressing  $C_2$  through  $C_1$  we get  $C_2 = -C_1 \left[ 2\sqrt{2a_{j_1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right]$  when  $j > N$ .

Therefore, for all  $j > N$  with  $a_{j_0} = 0$ ,  $a_{j_1} \neq 0$ , eigenfunction of the adjoint problem (2a\*) has the form

$$v_{j_0}(x) = C_1 \left( \cos 2j\pi x - \left[ 2\sqrt{2a_{j_1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] \sin 2j\pi x + \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi))d\xi}{2j\pi} \right). \quad (5 \text{ B}^*)$$

In order to show that the basis property of the system E@AF of the perturbed problems (1)–(2a), (1)–(2b) are unstable for an arbitrarily small integral perturbation of the boundary condition (2a), we will find the eigenfunctions of the problem (1)–(2a), and for the boundary condition (2b), we will find eigenfunction of the adjoint problem (2b\*) corresponding to the eigenvalue  $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ , that is

$$u_j^1(x) = C_1 \left\{ \cos(2j\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{a_{j_0}} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \cdot \frac{a_{j_0}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{k}{j^2 - k^2} \right] \sin(2j\pi x) \right\}, \quad (5 \text{ a})$$

$$v_{j_0}(x) = C_1 \left\{ \cos(2j\pi x) - \left[ 2\sqrt{2} \cdot a_{j_1} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] \sin(2j\pi x) + \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi))d\xi}{2j\pi} \right\} \quad (5 \text{ B}^*)$$

We choose constant  $C_1$  from the condition of biorthogonality  $(u_{j_0}(x), v_{j_0}(x)) = 1$ . Then we have

$$C_{1j} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 2\sqrt{2a_{j_1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] + \int_0^1 \sqrt{2} \sin 2j\pi x dx \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi))d\xi}{2j\pi} \right) = 1.$$

Using Holder's inequality to the integral summand, when  $j \rightarrow \infty$  we obtain estimate

$$\left| \int_0^1 \sqrt{2} \sin 2j\pi x dx \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi))d\xi}{2j\pi} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi j} \sqrt{\int_0^1 |p(\xi)|^2 d\xi} = O\left(\frac{1}{j}\right).$$

Then  $C_{1j} \left[ \sqrt{2a_{j_1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] = 1$ . Therefore  $C_{1j} = \frac{1}{\sqrt{2a_{j_1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right)} \rightarrow \infty$ , when  $j \rightarrow \infty$  because the

Fourier coefficients belong class  $a_{j_1} \in l_2$ . Estimating  $v_{j_0}(x)$  in the norm  $L_2(0,1)$  we get

$$\begin{aligned} \|v_{j_0}\| &\geq C_{1j} \|\cos 2j\pi x\| - C_{1j} \left\| \left[ 2\sqrt{2a_{j_1}} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right] \sin 2j\pi x + \int_0^x p(\xi) \frac{\sin(2j\pi(x-\xi))d\xi}{2j\pi} \right\| \geq \\ &\geq \frac{C_{1j}}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \left( 2a_{j_1} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{j}\right) \right]. \end{aligned}$$

Consequently  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{j_0}\| \cdot \|v_{j_0}\| = \infty$ . Namely the condition of the uniform minimality [6] of the E@AF system is not performed and, therefore, the system does not form a regular basis in  $L_2(0,1)$ . We formulate this fact as

*Theorem 3.* The set of functions  $p(x) \in L_2(0,1)$ , such that systems E@AF of the perturbed problems (1)–(2a) and (1)–(2b) do not form a regular basis in  $L_2(0,1)$  is dense one in  $L_2(0,1)$ .

Remark. Adjoint operators simultaneously have Riesz basis property of root functions. Hence we obtain

*Corollary 1.* The set  $P$  of functions  $p(x) \in L_2(0,1)$  for which the system E@AF of problems (2a\*) and (2b\*) for loaded differential equation forms a Riesz basis in  $L_2(0,1)$  is dense set in  $L_2(0,1)$ . The set  $L_2(0,1) \setminus P$  is also dense  $L_2(0,1)$ .

The results of the present work, in contrast to [2] demonstrate the instability and stability of the basis properties of root functions of the problem with an integral perturbation of the boundary conditions, which are regular, but not strongly regular ones.

In conclusion, the author expresses his gratitude to the corresponding member of National Academy of Sciences of Kazakhstan, doctor of physical and mathematical sciences, professor M.A. Sadybekov for fruitful discussions of results.

#### References

- 1 *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 352 с.
- 2 *Шкалик А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Матем. и механ. — 1982. — № 6. — С. 12–21.
- 3 *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 4. — С. 560–562.
- 4 *Sadybekov M.A., Imanbayev N.S.* On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition // Differential equations. — 2012. — Vol. 48, № 6. — P. 896–900.
- 5 *Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ВК, 1948. — С. 240.
- 6 *Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна.* — М.: Мир, 1972. — С. 66.

Н.С.Иманбаев

### Бейлокалды толқытылған шеттік шарттармен берілген Шредингер операторының түбірлік функцияларының базистік қасиеттерінің орнықтылық және орнықсыздық мәселесі

Мақалада Шредингер операторы үшін қойылған Самарский-Ионкин спектралды есебінің шеттік шарттарының біреуін интеграл арқылы толқыту барысында оның меншікті және тіркелген функцияларының жүйесінің базистік қасиеттерінің өзгеру сипаты зерттелген. Шредингер операторы үшін қойылған Самарский-Ионкин спектралды есебінің меншікті және тіркелген функцияларының  $L_2(0,1)$  кеңістігінде Рисс базисін құратындығы дәлелденген. Регулярлы, бірақ күшейтілген регулярлы емес болатын шеттік шарттардағы интегралдық толқытуға байланысты, түбірлік функциялардың базистік қасиеттерінің орнықтылығы мен орнықсыздығын осы жұмыстың нәтижелері дәлелдейді.

Н.С.Иманбаев

### К вопросу устойчивости и неустойчивости свойств базисности корневых функций оператора Шредингера с нелокальным возмущением краевого условия

В статье исследовано изменение базисных свойств систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) при интегральном возмущении одного из краевых условий спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора Шредингера. Доказано, что система СиПФ спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора Шредингера образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0,1)$ . Результаты настоящей работы демонстрируют неустойчивость и устойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

## References

- 1 Chaimark M.A. *Linear differential operators*, Moscow: Nauka, 1969, p. 352.
- 2 Shkalikov A.A. *On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions*, Moscow: State University Bull. Mat. and Mech., 1982, 6, p. 12–21.
- 3 Makin A.S. *Differential Equations*, 2006, 42, 4, p. 560–562.
- 4 Sadybekov M.A., Imanbayev N.S. *Differential equations*, 2012, 48, 6, p. 896–900.
- 5 Khardi G.G., Lyttlvud D.E., Polia G. *Inequalities*, Moscow: VK, 1948, p. 240.
- 6 *Function analysis* / Ed. S.G.Crane, Moscow: Mir, 1972, p. 66.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;  
 РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Караганда (E-mail: modth1705@mail.ru)

### Стабильностные свойства компаньонов позитивных йонсоновских теорий

В статье рассмотрен позитивный аналог конечного  $\alpha$ -форсинга для  $\Delta$ - $M$ -теории. Показана эквивалентность стабильности центрального типа такой теории форсинг-компаньоном при условии совершенности и позитивной экзистенциальной полноты. При изучении стабильностных свойств теорий важную роль играет понятие форкинга, введенное С.Шелахом при изучении спектральных вопросов полных теорий. Йонсоновские теории, вообще говоря, неполны. Автором статьи приведены некоторые результаты относительно аксиоматического задания форкинга на случай  $\Delta$ - $M$ -теорий, которые являются позитивным обобщением йонсоновских теорий. Также рассмотрены понятие центрального типа при некотором обогащении сигнатуры и связь центрального типа с самой теорией. С помощью синтаксического подобия выявлены инвариантные относительно семантического подобия некоторые стабильностные свойства в классе  $\Delta$ - $M$ -теорий.

*Ключевые слова:* йонсоновская теория, экзистенциально замкнутая модель, форкинг, центральный тип, синтаксическое и семантическое подобие йонсоновских теорий.

Основной целью данной работы является дать основные понятия и результаты в связи с понятием конечного форсинга Робинсона [1, 2] для позитивных йонсоновских теорий. Все основные сведения о позитивных йонсоновских теориях можно найти в [3].

Напомним, как строятся базисные множества для произвольных счетных теорий с помощью некоторого обобщения в смысле кванторов конечного форсинга Робинсона в [3, 4]. В связи с результатами работы [5] мы можем с помощью позитивной морлизации указанные выше понятия свести к  $B^+(At)$ . Существенным является то, что во всех определениях, касающихся как моделей, так и формул, мы будем иметь дело в качестве морфизмов лишь с погружениями. В [6] был введен класс теорий, который в пересечении с классом йонсоновских теорий обобщает его, а также содержит обобщенные йонсоновские теории, введенные в [4]. Интересно рассмотреть связь форсинга для таких классов теорий, когда мы рассматриваем только погружения. Напомним определение этого класса.

*Определение 1.* Теория  $T$  называется  $\Delta$ -позитивно мустафинской ( $\Delta$ - $PM$ )-теорией, если:

- 1) теория  $T$  имеет бесконечные модели;
- 2) теория  $T$  является  $\Pi_{n+2}^+$ -аксиоматизируемой;
- 3) теория  $T$  допускает  $\Delta$ - $JEP$ ;
- 4) теория  $T$  допускает  $\Delta$ - $AP$ .

Назовем теорию  $\Delta$ -мустафинской ( $\Delta$ - $M$ )-теорией, если в определении 1 рассматриваются только погружения.

Пусть  $L$  — язык первого порядка.  $At$  есть множество атомарных формул данного языка.  $B^+(At)$  — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и