

Акпанов И.А., Ибраева Д.К., Секербаева Р.И., Карагандинский государственный университет имени академика Е.А. Букетова, факультет математики и информационных технологий, гр. Мех-404, студент; гр. ММех-68, магистрантка; гр. ММех-67, магистрантка
(Научный руководитель - к.ф.-м.н., доцент Есенбаева Г.А.)

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДАХ

Неотъемлемым атрибутом инструментария механика, без чего просто невозможно представить его работу, является широчайший спектр используемых в механике математических методов.

Уравнения в частных производных повсеместно встречаются в механике сплошных сред, смесей жидкости, тонкостенных конструкций, в механике разрушения, в механике для сплавов с памятью формы, в дифференциальных моделях теории вязкоупругости, в теории наследственной упругости, теории обтекания (например, уравнения неразрывности движения идеальной жидкости) и во многих других областях механики.

Многие задачи механики приводят к исследованию уравнений в частных производных гиперболического типа. Укажем некоторые приложения таких уравнений:

- уравнения Эйлера для нестационарных и сверхзвуковых стационарных течений сжимаемого газа;
- нестационарные уравнения Максвелла и различные их комбинации с уравнениями Эйлера (уравнения магнитогидродинамики и ряда других математических моделей плазмы);
- нестационарные уравнения механики деформируемых твердых тел для ряда реологических моделей и геометрий (как в многомерных моделях сплошной среды, так и в ряде теорий стержневых и оболочечных конструкций);
- нестационарные одно- и двумерные уравнения течения несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в приближении мелкой воды;
- нестационарные уравнения течения несжимаемой жидкости в упруго деформируемых трубах (в частности, описывающих пульсовые течения крови в крупных кровеносных сосудах и воздуха в трахейно-бронхиальном тракте);
- динамические уравнения переноса энергии в системах и многие другие. [1, с. 47-48]

Если в каком-нибудь месте твердой, жидкой или газообразной среды возбуждены колебания частиц, то вследствие взаимодействия атомов и молекул среды колебания начинают передаваться от одной точки к другой с конечной скоростью. Процесс распространения колебаний в среде называется волной.

Волна – это процесс распространения возмущений некоторой величины в пространстве с течением времени. Если возмущения описываются как механическое движение среды, то волна называется механической. Механическая волна представляет собой процесс распространения механических колебаний и течений в пространстве.

Характерной особенностью механических волн является то, что они распространяются в материальных средах (твердых, жидких или газообразных). Изучение таких волн, а также других колебательных явлений в механике приводят к волновому уравнению.

Рассмотрим задачу для волнового уравнения с заданными начальными условиями, где функция $u(x, t)$ характеризует смещение одномерного тела в точке x в момент t

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Применяя преобразование Лапласа к исходной задаче [2, с. 156]

$$U_p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \cdot e^{-ipx} dx,$$

получим дифференциальную задачу в изображениях

$$U_p''(t) + (a^2 p^2 - c^2) U_p(t) = F_p(t), \quad U_p(0) = \Phi_p, \quad U_p'(0) = G_p,$$

$$F_p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \cdot e^{-ipx} dx, \quad \Phi_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot e^{-ipx} dx, \quad G_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-ipx} dx.$$

Введем обозначение $s = \sqrt{a^2 p^2 - c^2}$ и найдем общее решение дифференциального уравнения задачи в изображениях

$$U_p(t) = C_1(p, t) \cos st + C_2(p, t) \sin st,$$

где

$$\begin{cases} C_1(p, t) = -\frac{1}{s} \int_0^t F_p(\tau) \sin s\tau \cdot d\tau + C_1(p), \\ C_2(p, t) = \frac{1}{s} \int_0^t F_p(\tau) \cos s\tau \cdot d\tau + C_2(p), \end{cases}$$

тогда
$$U_p(t) = C_1(p) \cos st + C_2(p) \sin st + \frac{1}{s} \int_0^t F_p(\tau) \sin s(t-\tau) d\tau,$$

и с учетом начальных условий решение задачи в изображениях примет вид

$$U_p(t) = \Phi_p \cos st + \frac{1}{s} G_p \sin st + \frac{1}{s} \int_0^t F_p(\tau) \sin s(t-\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} U_p(t) &= \Phi_p \cos \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t + G_p \frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} \int_0^t F_p(\tau) \sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} (t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Для нахождения оригинала используем обратное преобразование Лапласа [2, с. 157]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U_p(t) \cdot e^{ipx} dp, \\ u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_p \cos \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t \cdot e^{ipx} dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G_p \frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} e^{ipx} dp + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} \int_0^t F_p(\tau) \sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} (t-\tau) d\tau \right) \cdot e^{ipx} dp, \end{aligned}$$

$$u(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_p \cos \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t \cdot e^{ipx} dp + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G_p \frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} e^{ipx} dp = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t \cdot e^{ip(x-\xi)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} e^{ip(x-\xi)} d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t). \end{aligned}$$

Известно, что

$$\frac{\sin r}{r} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} J_0(r \sin \psi \sin \theta) \cdot e^{ir \cos \psi \cos \theta} \sin \theta \cdot d\theta, \quad (1)$$

где J_0 - функция Бесселя нулевого порядка.

Произведем замену

$$r \cos \psi = -apt, \quad r \sin \psi = ict, \quad r^2 = t^2 (a^2 p^2 - c^2),$$

$$\cos \theta = \frac{\beta}{at}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{a^2 t^2}}, \quad \sin \theta \cdot d\theta = -\frac{1}{at} d\beta,$$

тогда (1) с учетом того, что $J_0(iz) = I_0(z)$, где $I_0(z)$ - «видоизмененная» функция Бесселя нулевого порядка, примет вид

$$\frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) \cdot e^{-ip\beta} d\beta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{1}{4\pi a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left(\int_{-at}^{at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) \cdot e^{-ip\beta} d\beta \right) \cdot e^{ip(x-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-at}^{at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) \cdot e^{ip(x-\xi-\beta)} d\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Положим

$$H(\beta) = \begin{cases} 0, & \left| \frac{\beta}{a} \right| > |t|, \\ I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right), & \left| \frac{\beta}{a} \right| < |t|. \end{cases} \quad (3)$$

По интегральной формуле

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{ip(x-\xi)} d\xi$$

получим

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} H(\beta) \cdot e^{ip(z-\beta)} d\beta. \quad (4)$$

В нашем случае $z = x - \xi$. В силу (3)

$$H(x - \xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < x - at, \quad x + at < \xi < \infty, \\ I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x - \xi)^2}{a^2}} \right), & x - at < \xi < x + at. \end{cases} \quad (5)$$

Последовательно применяя (3), (4), (5), преобразуем (2) и найдем $u_2(x, t)$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{1}{2a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-at}^{at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) \cdot e^{ip(x-\xi-\beta)} d\beta \right\} = \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Имеем первоначальные выражения для $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t \cdot e^{ip(x-\xi)} d\xi, \quad (7)$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} e^{ip(x-\xi)} d\xi. \quad (8)$$

Интегрируя (7) по t и сопоставляя выражения (6), (8), получим

$$\int_0^t u_1(x, \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} e^{ip(x-\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi.$$

Дифференцируя последнее соотношение по t и учитывая, что $I_0(0)=1$, $I_0'(z)=I_1(z)$, найдем $u_1(x,t)$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \left\{ \frac{1}{2a} \cdot a \varphi(x+at) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-x-at)^2}{a^2}} \right) + a \varphi(x-at) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-x+at)^2}{a^2}} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) I_0' \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) \cdot \frac{ct}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} d\xi = \\ &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{ct}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} d\xi. \quad (9) \end{aligned}$$

Складывая (6) и (9), получим

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi + \\ &+ \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{ct}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} d\xi. \end{aligned}$$

Заметим, что можно не производить вычислений $I_1 + I_2$, а сразу же воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0 \left(\sqrt{c} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2} \right) g(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{c} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1 \left(\sqrt{c} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2} \right)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Однако, даже используя готовую формулу, все же придется произвести некоторые преобразования, учитывая замену $y = at$ и свойства функций Бесселя и «видоизмененных» функций Бесселя.

Теперь, учитывая, что

$$F_p(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) e^{-ip\xi} d\xi$$

и используя (6), (8)

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} t}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} e^{ip(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi,$$

вычислим I_3

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 p^2 - c^2}} \int_0^t F_p(\tau) \sin \sqrt{a^2 p^2 - c^2} (t-\tau) d\tau \right) \cdot e^{ipx} dp =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi.$$

В результате, получим

$$\begin{aligned} u(x,t) = I_1 + I_2 + I_3, \Rightarrow u(x,t) = & \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi + \\ & + \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{ct}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} d\xi + \\ & + \frac{1}{2a} \cdot \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, результатом работы является построение в аналитической форме точного решения $u(x, t)$ исследуемой математической модели прикладной задачи.

Задачи для уравнений в частных производных, будучи тесно связанные с изучением механических проблем, приобрели особую актуальность в связи с расширяющимся объемом их приложений. Они естественным образом возникают при исследовании задач классической механики, механики сплошных сред, акустики, оптики, гидродинамики и др., при моделировании процессов колебаний, деформации, переноса, тепло- и массообмена, динамики, разрушения и т.д. [1, с. 52-55]

Так волновое уравнение задает колебания тонкой мембраны, стержня и других механических тел и систем (теория колебаний), а также другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно линейная: звук в газах, жидкостях и твердых телах). Такое уравнение находит применение и в других областях механики, физики, техники и др., например, при описании гравитационных волн и в квантовой физике. [3, с. 65]

Отметим, что одни и те же математические модели могут описывать многочисленные, несхожие по природе процессы в самых разных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике и т.д., поэтому результаты данной работы могут быть использованы в прикладных задачах из различных областей знаний, которые при математическом моделировании приводятся к представленной задаче с начальными данными.

Литература:

1. Холодов А.С. Численные методы решения уравнений гиперболического типа. – М.: Изд-во МФТИ, 2007. – 112 с.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
3. Yessenbayeva G.A., Yesbayev A.N., Nurpeisova A.N. The boundary value problems in mathematical modeling of mechanical problems /Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики и информатики», посвященной 25-летию Независимости РК. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. – С. 65.