К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Жанбусинова Б.Х., Космакова М.Т., Шаяхметова Б.К.,Шаукенова К.С.
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail:bagdat.60@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка с отклонением аргумента

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x(\lambda t) + q(t) \tag{1}$$

где $p(t), q(t) \in C(-\infty, +\infty)$, $p(t+\frac{\omega}{\lambda}) = p(t)$, $q(t+\frac{\omega}{\lambda}) = q(t)$, $\omega > 0$.

Для того, чтобы решение $x(t)$ было периодическим необходимо и достаточно, чтобы $x(0) = x(\omega)$.

Найдем общее решение уравнения (1), сделав предварительно замену переменной $\lambda t = s$, $\frac{dx}{dt} = \lambda \frac{dx}{ds}$, тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda} p\left(\frac{s}{\lambda}\right) x(s) + \frac{1}{\lambda} q\left(\frac{s}{\lambda}\right),$$

общим решением которого будет

$$x(s) = \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^s q\left(\frac{u}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{1}{\lambda}\int_0^u p\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau\right)du + C\right]\exp\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^s p\left(\frac{u}{\lambda}\right)du\right).$$

В силу эквивалентных преобразований общее решение уравнения (1) имеет аналогичный вид

$$x(t) = \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^t q\left(\frac{u}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{1}{\lambda}\int_0^u p\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau\right)du + C\right]\exp\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^t p\left(\frac{u}{\lambda}\right)du\right).$$

В дальнейшем для краткости записи будем обозначать через $E(t) = \exp\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^t p\left(\frac{u}{\lambda}\right)du\right)$.

Используя условие периодичности решения $x(0) = x(\omega)$, найдем постоянную C:

$$C = \frac{E(\omega)}{\lambda(1 - E(\omega))}\int_0^\omega q\left(\frac{u}{\lambda}\right)E(u)du.$$

Таким образом, периодическое решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^t q\left(\frac{u}{\lambda}\right)E^{-1}(u)du + \frac{E(\omega)}{\lambda(1 - E(\omega))}\int_0^\omega q\left(\frac{u}{\lambda}\right)E(u)du\right]E(t). \tag{2}$$

Теорема 1. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом вида (1):

а) имеет единственное периодическое решение (2), если $\int_0^\omega p\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt \neq 0$;

б) не имеет периодических решений, если $\int_0^\omega p\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt = 0$ и $\int_0^\omega q\left(\frac{t}{\lambda}\right)E(t)dt \neq 0$;

в) имеет множество периодических решений, если $\int_0^\omega p\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt = 0$ и $\int_0^\omega q\left(\frac{t}{\lambda}\right)E(t)dt = 0$

Список использованных источников

1. *Трикоми Ф.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.- Киев: Вища шк., 1976

2. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами.- Киев: Наук. Думка, 1984.