

### Трехшарнирная арка с консольно-зашемленными опорами

В статье изложен расчет трехшарнирной статически определимой арки с консольно-зашемленными опорами, на которую действует подвижная равномерно распределенная нагрузка. Определены неблагоприятное положение нагрузки, рациональное расположение крайних шарниров от зашемленных опор, оптимальная стрела подъема с учетом нагрузки на арочную конструкцию и распределение материала по всей длине арки. Экономическая эффективность применения трехшарнирной арки с консольно-зашемленными опорами по материалоемкости составляет порядка 9 % по сравнению с традиционной трехшарнирной аркой.

*Ключевые слова:* консольно-зашемленная арка, невыгодное положение нагрузки, ось арки, оптимизация, экономическая эффективность по материалоемкости.

В настоящее время в строительстве существует необходимость в создании больших пролетов для промышленных и гражданских сооружений. Данные конструкции требуют дополнительных затрат для уточнения напряжения деформированного состояния как конструкции, так и их проектных параметров. В целях экономии производят изменения стандартных конструкций с более рациональным использованием материала и модернизацию расчетных схем типовых конструкций.

Большую роль в строительстве сооружений для перекрытия больших пролетов в инженерной практике играют арочные конструкции. Их часто применяют при перекрытии большепролетных мостовых, спортивных, зрелищных и других сооружений.

Арочные конструкции, в зависимости от количества шарниров, бывают трехшарнирные, двухшарнирные и бесшарнирные. Несложными в расчетах являются трехшарнирные арочные конструкции, так как они статически определимы.

Трехшарнирной является система, состоящая из двух криволинейных стержней, соединенных между собой ключевым шарниром  $C$  (рис. 1) и двумя шарнирно-неподвижными опорами  $A$  и  $B$ . Если шарнир  $C$  расположен выше линии опорных шарниров  $A - B$ , система называется арочной, если ниже — висячей. Трехшарнирная система неизменяема, так как недостающий стержень между стержнями возмещен дополнительной опорной связью. Данная конструкция статически определима относительно опорных закреплений, так как число параметров, определяющих реакции этих закреплений, равно трем. Этому условию удовлетворяет комбинация шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опор — для сооружений, опирающихся в двух точках [1].

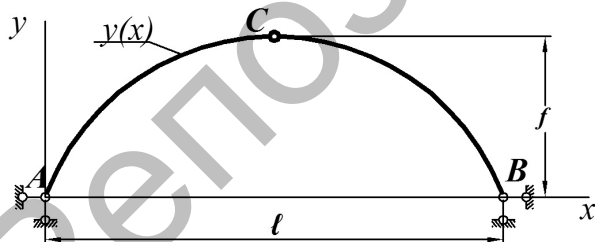


Рисунок 1. Типовая трехшарнирная арка

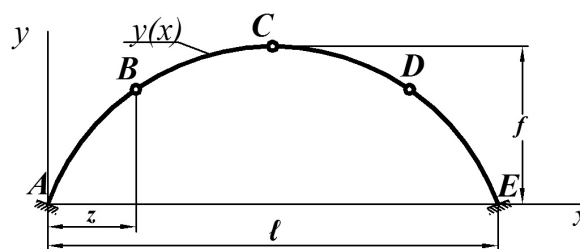


Рисунок 2. Трехшарнирная арка с консольно-зашемленными опорами

Традиционные схемы трехшарнирных арок не позволяют увидеть все возможные плюсы данной конструкции, так как в классической схеме шарниры находятся непосредственно в опорах арки.

В предлагаемых исследованиях рассмотрена схема симметричной арки, ось которой описана уравнением  $y(x)$ . Крайние шарниры находятся на некотором расстоянии от консоли, что позволяет уменьшить изгибающий момент, размеры сечения (рис. 2), а значит — и ее материалоемкость.

Предлагаемое расположение шарниров позволяет несколько уменьшить внутренние усилия и тем самым спроектировать более экономичную арку. Условие прочности в случае учета изгиба и сжатия можно определить из формулы [1]

$$\sigma = \frac{|M|}{W_x} + \frac{|N|}{A} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где  $M$  и  $N$  — изгибающий момент и продольная сила в произвольном сечении арки;  $W_x$  и  $A$  — осевой момент сопротивления изгибу и площадь поперечного сечения арки;  $\sigma$  и  $[\sigma]$  — расчетное и допускаемое напряжения материала в опасном сечении конструкции.

Требуется определить, при каких параметрах вес арочной конструкции будет минимальным.

**Ось арки.** Рациональным очертанием оси арки называется такое, при котором кривая давления от заданной неподвижной нагрузки совпадает с осью арки. При вертикальной нагрузке ось арки будет рациональной, если ее очертание меняется по закону изменения балочного момента [2].

При выборе очертания оси трехшарнирной конструкции при действии равномерно распределенной внешней нагрузки в данных исследованиях опирались на работу [3], где установлено, что оптимальной осью является квадратная парабола:

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

$$\sin \varphi = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

**Определение реакции.** Как и при расчете многопролетных статически определимых балок, составляем поэтажную схему (рис. 3).

Для нахождения изгибающих моментов, поперечных и продольных усилий необходимо определить реакции в опоре, хотя бы с одной из сторон, например — слева. Рассмотрим подвесную часть арки  $BD$  и определим реакции в шарнире  $B$ :

$$V_B = \frac{q(b-z) \left( \frac{l-z-b}{2} \right)}{l-2z};$$

$$H = H_B = \frac{V_B \frac{l-2z}{2} - q(b-z) \left( \frac{l-2z}{2} - \frac{b-z}{2} \right)}{f - f_z}.$$

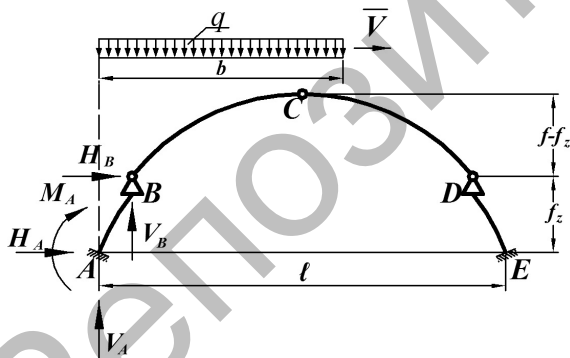


Рисунок 3. Поэтажная схема трехшарнирной арки с консольно-защемленными опорами

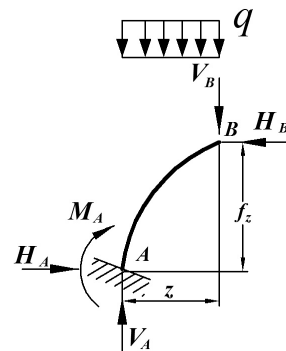


Рисунок 4. К расчету консоли

Для определения изгибающих моментов  $M$ , поперечных  $Q$  и продольных  $N$  усилий следует определить реакции в опорных защемлениях. Для этого рассмотрим криволинейную консоль  $AB$  (рис. 4), найдем реакции и момент в жесткой заделке  $A$ :

$$V_A = q \cdot z + V_B, \quad H_A = H_B = H;$$

$$M_A = \frac{-q \cdot z^2}{2} - V_B \cdot z + H_B \cdot f_z.$$

Изгибающие моменты  $M$ , поперечные  $Q$  и продольные  $N$  усилия определяются традиционными выражениями

$$M = M^{\circ} - H_A \cdot y;$$

$$Q = Q^{\circ} \cdot \cos \varphi - H_A \cdot \sin \varphi;$$

$$N = -Q^{\circ} \cdot \sin \varphi - H_A \cdot \cos \varphi,$$

согласно которым для  $l=100м$ ,  $a=0,6l$ ,  $f=0,05l$  построены эпюры внутренних усилий для трехшарнирной арки с консольно-зашемленными опорами (рис. 5).

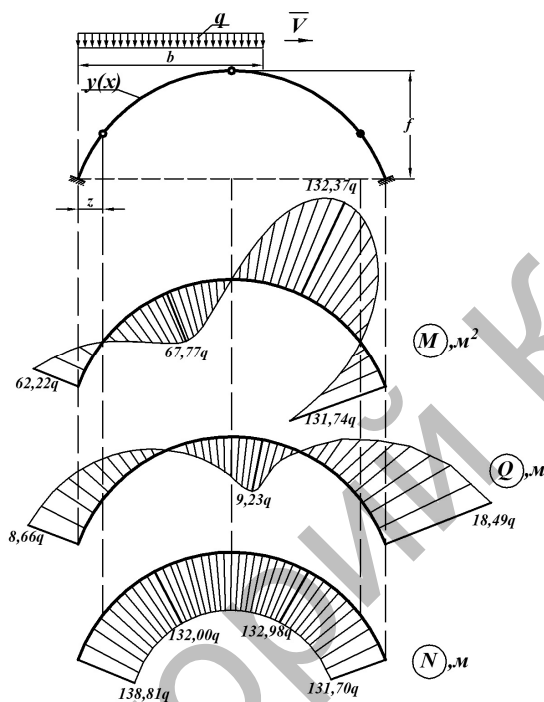


Рисунок 5. Эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

**Подвижная равномерно распределенная нагрузка.** В работе конструкции большую роль играет неблагоприятное положение равномерно распределенной нагрузки  $q$ . Положение нагрузки определяется параметрами  $a$  и  $b$ , меняющимися в диапазоне  $a \in [0, l]$ ,  $b \in [0, l - a]$  (рис. 6).

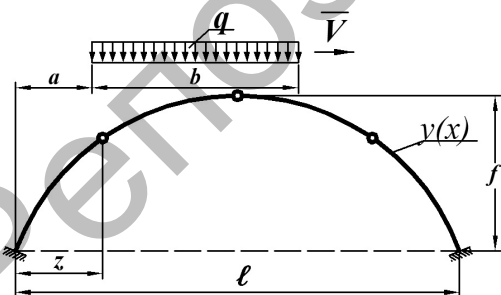


Рисунок 6. Подвижная равномерно распределенная нагрузка

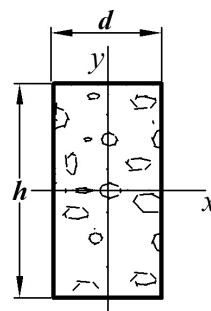


Рисунок 7. Сечение арки

Как и в [3], установлено, что максимальные внутренние усилия, а значит, и расход материала достигается при  $a = 0$ ,  $b = 0,6 l$ .

Далее вычислим размеры поперечного сечения арки, необходимые для определения расхода материала. Сечение примем прямоугольное (рис. 7).

Из условия прочности (1) имеем

$$W_x = \frac{d \cdot h^2}{6}, \quad A = d \cdot h,$$

где примем  $d = \frac{h}{2}$ .

Отсюда следует, что

$$\sigma = \frac{12 \cdot |M|}{h^3} + \frac{2 \cdot |N|}{h^2} - [\sigma] = 0.$$

Решая последнее уравнение численным методом, находим значение  $h$ .

**Задача оптимизации.** В данной работе требуется найти три рациональных значения проектных параметров:

- неблагоприятное положение подвижной равномерно распределенной нагрузки  $q$  (значения  $b$ );
- положение крайних шарниров (значение  $z$ );
- наивыгоднейшую стрелу подъема  $f$ . Для этого использован алгоритм многомерной оптимизации — метод покоординатного спуска.

Необходимо определить наименьшее значение функции  $u(M) = u(b, z, f)$ . Здесь через  $M$  обозначена точка трехмерного пространства с координатами:  $M = (b, z, f)$ . Выберем какую-нибудь начальную точку  $M_0 = (b_0, z_0, f_0)$  и рассмотрим функцию  $u$  при фиксированных значениях всех переменных, кроме первой:  $M_0 = (b, z_0, f_0)$ . Тогда она превратится в функцию одной переменной  $b$ . Изменяя эту переменную, будем двигаться от начальной точки  $b = b_0$ , пока не дойдем до конца диапазона ее изменения, вычисляя в каждом узле значение функции  $u$ . Среди этих значений определим минимальное значение, фиксируем, при каком значении  $b_1$  это достигается. Точку с координатами  $(b_1, z_0, f_0)$  обозначим через  $M_1$ , при этом  $u(M_0) \geq u(M_1)$ .

Фиксируем теперь переменные:  $b = b_1, f = f_0$ , затем рассмотрим функцию  $u$  как функцию одной переменной  $z$ :  $u(b_1, z, f_0)$ . Изменяя  $z$ , будем опять двигаться от начального значения  $z = z_0$  в сторону убывания функции, пока не дойдем до минимума при  $z = z_1$ . Точку с координатами  $(b_1, z_1, f_0)$  обозначим через  $M_2$ , при этом  $u(M_1) \geq u(M_2)$ .

Проведем такую же минимизацию функции по переменной  $f$ . После чего снова вернемся к  $b$  и продолжим процесс. Эта процедура вполне оправдывает название метода. С ее помощью мы построим последовательность точек  $M_0, M_1, M_2, \dots$ , которой соответствует монотонная последовательность значений функции  $u(M_0) \geq u(M_1) \geq u(M_2) \geq \dots$ . Обрывая ее на некотором шаге  $k$ , можно приближенно принять значение функции  $u(M_k)$  за ее наименьшее значение в рассматриваемой области.

Отметим, что данный метод сводит задачу поиска наименьшего значения функции нескольких переменных к многократному решению одномерных задач оптимизации.

**Вывод.** В исследованиях трехшарнирной статически определимой арки с консольно-защемленными опорами определены оптимальные параметры, при которых вес арки будет минимальным. К таким параметрам относятся положение крайних шарниров ( $z = 0,0801l$ ) и стрела подъема ( $f = 0,0794l$ ). Также было найдено невыгодное положение равномерно распределенной нагрузки  $q$  ( $a = 0; b = 0,6l$ ). После получения результатов (рис. 8) выяснилось, что опасные сечения ( $h = 0,302q$ ) будут находиться на расстоянии  $x = 0,73l$  и  $x = l$ .

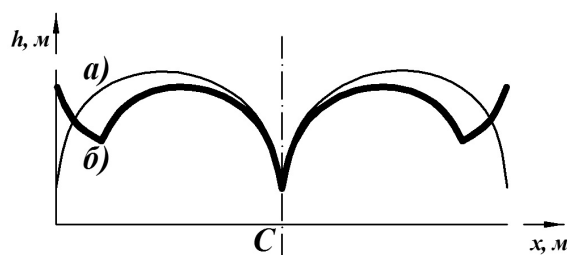


Рисунок 8. Сравнение размеров сечений арок:  
а) традиционная трехшарнирная арка [4];  
б) консольно-защемленная трехшарнирная арка

Исследования показали, что экономическая эффективность по материалоемкости применения трехшарнирной арки с консольно-защемленными опорами составляет порядка 9 % по сравнению с традиционной трехшарнирной аркой.

#### Список литературы

- 1 *Степин П.А.* Сопrotивление материалов. — М.: Высш. шк., 1979. — 312 с.
- 2 *Дарков А.В.* Строительная механика. — М.: Высш. шк., 1976. — 542 с.
- 3 *Бейсебаев А.К., Заикина Т.В.* Оптимизация геометрического очертания оси трехшарнирной арки // Вестн. Караганд. ун-та Сер. Математика. — 2005. — № 2 (38). — С. 49–51.
- 4 *Киселев В.А.* Строительная механика. — М.: Стройиздат, 1976. — 511 с.

А.К.Бейсебаев, В.Ю.Соловьев, Т.В.Заикина

#### Тірегі консольді бекітілген үш топсалы арка

Мақалада қозғалмалы бірқалыпты таралған жүктеме әрекет ететін тірегі консольді бекітілген үш топсалы арканың есебі қарастырылған. Жүктеменің жағымсыз қалпы, шекті топсалардың бекітілген тіректерден оңтайлы орналасуы, жүктемеге байланысты арканың биіктігі мен ұзындығын оңтайландыру мәселелері зерттелген. Консольді бекітілген үш топсалы арканың экономикалық тиімділігі, көрнекі материалдың жұмсалуды бойынша, дәстүрлі үш топсалы аркамен салыстырғанда шамамен 9 % құрайды.

A.K.Beisebayev, V.Yu.Solovyev, T.V.Zaikina

#### Three-hinged arch with the console jammed support

In this work calculation of statically indefinable three-hinged arch with the console jammed support which evenly distributed loading operates is stated. There is determined the adverse provision of loading, rational arrangement of extreme hinges from jammed support, optimum arrow of lifting with account of load on arch design and material distributional along whole length of arch. Economic efficiency of application of a three-hinged arch with the console jammed support on material capacity makes about 9 % in comparison with traditional arch.

#### References

- 1 *Stepin P.A.* *Resistance materials*, Moscow: High school, 1979, 312 p.
- 2 *Darkov A.V.* *Structural Mechanics*, Moscow: High school, 1976, 542 p.
- 3 *Beisebayev A.K., Zaikina T.V.* *Optimization of the geometric shape of the arch axis fully articulated* // Bull. of KarSU. Ser. Matematika, 2005, No. 2 (38), p. 49–51.
- 4 *Kiselev A.V.* *Structural Mechanics*, Moscow: Stroyizdat, 1976, 511 p.