МАТЕМАТИКА

УДК 510.67

Д.Б.Алибиев, А.Ш.Кажикенова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

КЛАСС ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Мақала операторлы-әр түрлі теңдеулерді зерттеуге және оларды сандық әдістермен шешуге арналған. Итерациялық процестің орнықтылығы және айырымдық құрылыстың жинақтылығы 1, 2-ші теоремада дәлелденген. Нәтижелері мұнай-газ өнеркәсібінде практикалық қолданыста пайдаланылады.

This work is devoted to researching of operating-residual equalizations and number solution of them. The theorems 1, 2 are proved following to the solid division processes and convergence of residual schemes. This work can be practiced in the field of oil-gas industry.

Пусть дана система операторно-разностных уравнений вида

$$J(\omega,\psi) + A\omega + B\psi = f, \qquad (1)$$
$$A\psi = \omega,$$

где A, B — операторы и $J(\omega,\psi)$ — нелинейная форма, заданные на всем пространстве H. Предположим, что система уравнений (1) определена при выполнении следующих условий:

а) A — самосопряженный оператор, $A: H \to H$ и существуют числа $\beta_1 > 0$, β_2 такие, что

$$\beta_1 E \le A \le \beta_2 E,$$

т.е.

$$A = A^* > 0,\ \beta_1\|x\|^2 \le (Ax, x) \le \beta_2\|x\|^2, \qquad (2)$$

для любого $x \in H$;

б) оператор B — линейный и неотрицательный, т.е. $(Bx, x) \ge 0$, для любого $x \in H$;

в) нелинейная форма $J(\omega,\psi)$ является билинейной, т.е. по каждому аргументу $J(\omega,\psi)$ является линейной и удовлетворяет тождеству

$$(J(\omega,\psi),\psi) = 0, \qquad (3)$$

которое справедливо для любых ω и ψ из H. Кроме этого, относительно билинейной формы $J(\omega,\psi)$ предположим, что справедливо неравенство

$$\left|(J(\omega,\psi),\nu)\right| \le C_0\|\psi\|_A * \|\psi\| * \|A\nu\|, \qquad (4)$$

где C — константа, зависящая от размерности пространства H, а C_0 — равномерно ограниченная константа. Для билинейной формы $J(\omega,\psi)$ в силу тождества имеет место следующее равенство:

$$(J(\omega,\psi), \vartheta = -(J(\omega,\nu),\psi). \qquad (5)$$

Предположим также, что решение задачи (1), принадлежащее пространству H_A, существует.

Для численной реализации решения системы уравнений (1) рассмотрим следующий итерационный процесс [1]:

$$\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau} + J(\omega^n, \psi^{n+1/2}) + A\omega^n + B\psi^{n+1/2} = f, \qquad (6)$$

$$A\psi^{n+1/2} = \omega^{n+1/2}, \tag{7}$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\tau} + A(\omega^{n+1} - \omega^n) = 0, \tag{8}$$

$$A\psi^{n+1} = \omega^{n+1}. \tag{9}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполнены условия а)–в). Тогда для решения итерационной схемы (6)–(9) имеет место оценка

$$\Upsilon^n = \left\|\psi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left\|\omega^n\right\|_A^2 \le \chi_1^n \Upsilon^0 + \chi_2 \frac{\alpha_0 C_0}{1+\chi_0} * \|f\|_{A-1}^2 < \infty.$$

В дальнейшем через C_0 обозначим равномерно ограниченные константы, не зависящие от размерности пространств и номера итерации.

Доказательство. Умножим (6) на $\psi^{n+1/2}$ в H и с учетом свойств оператора A и тождеств (3), (7) имеем

$$\left\|\psi^{n+1/2}\right\|_A^2 - \left\|\psi^n\right\|_A^2 + \left\|\psi^{n+1/2} - \psi^n\right\|_A^2 + 2\tau(A\psi^n, A\psi^{n+1/2}) + 2\tau(B\psi^{n+1/2}, \psi^{n+1/2}) = 2\tau(f, \psi^{n+1/2}), \tag{10}$$

Умножая соотношение (8) на $\psi^{n+1} + \psi^{n+1/2}$ скалярно в H, получим:

$$\left\|\psi^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|\psi^{n+1/2}\right\|_A^2 + \tau(\omega^{n+1} - \omega^n, A(\psi^{n+1} + \psi^{n+1/2})) = 0. \tag{11}$$

Теперь умножим (8) на $\omega^{n+1} + \omega^n$, тогда

$$(\omega^{n+1} + \omega^n, A(\psi^{n+1} - \psi^{n+1/2})) + \tau(\left\|\omega^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|\omega^n\right\|_A^2) = 0. \tag{12}$$

Далее, перемножим (12) на τ и сложим вместе равенства (10)–(12), в результате получим энергетическое тождество

$$\left\|\psi^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|\psi^n\right\|_A^2 + \left\|\psi^{n+1/2} - \psi^n\right\|_A^2 + 2\tau\left\|A\psi^{n+1}\right\|^2 + \tau^2\left(\left\|\omega^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|\omega^n\right\|_A^2\right) + 2\tau(B\psi^{n+1/2}, \psi^{n+1/2}) = 2\tau(f, \psi^{n+1/2}). \tag{13}$$

Для правой части равенства (13) используем равенства Коши–Буняковского и «ε»-неравенство, полученный результат оценим следующим образом:

$$2\tau(f, \psi^{n+1/2}) = 2\tau\left[(f, \psi^{n+1/2} - \psi^n) + (f, \psi^n)\right] \le 2\tau\left\|\psi^{n+1/2} - \psi^n\right\|_A * \|\beta\|_{A-1} + 2\tau\left\|\psi^n\right\|_A * \|f\|_{A-1} \le$$

$$\le \tau\|f\|_{A-1}^2(\tau + \frac{1}{\varepsilon_0}) + \tau\varepsilon_0\left\|\psi^n\right\|_A^2 + \left\|\psi^{n+1/2} - \psi^n\right\|_A^2, \tag{14}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольная константа. С учетом неравенства (14)

$$\left\|A\psi^{n+1}\right\|^2 \ge \beta_1\left\|\psi^{n+1}\right\|_A^2 \text{ и } \left\|A\psi^{n+1}\right\|^2 \ge \frac{1}{\beta_2}\left\|\omega^{n+1}\right\|_A^2,$$

которые следуют из условия а) и из (13), имеем следующую оценку:

$$\left\|\psi^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|\psi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left(\left\|^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|\omega^n\right\|_A^2\right) + \tau\beta\left\|\psi^{n+1}\right\|_A^2 + \frac{\tau}{\beta_2}\left\|\omega^{n+1}\right\|_A^2 \le \tau\varepsilon_0\left\|\psi^n\right\|_A^2 + \tau\alpha_0\|f\|_{A-1}^2,$$

где $\alpha_0 = \tau + \dfrac{1}{\varepsilon_0}$. Преобразуем последнее соотношение в виде

$$(1+\tau\beta_0)\left\|\psi^{n+1}\right\|_A^2 + \tau^2(1+\tau\frac{1}{\tau^2\beta_2})\left\|\omega^{n+1}\right\|_A^2 \le (1+\tau\varepsilon_0)\left\|\psi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left\|\omega^n\right\|_A^2 + \tau\alpha_0\|f\|_{A-1}^2,$$

далее

$$(1+\chi_0)(\left\|\psi^{n+1}\right\|_A^2 + \tau^2\left\|\omega^{n+1}\right\|_A^2 \le (1+\varepsilon_0\tau)(\left\|\psi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left\|\omega^n\right\|_A^2) + \tau\alpha_0\|f\|_{A-1}^2, \tag{15}$$

где $1+\tau\chi_0 = \inf\left\{1+\tau\beta_0, 1+\tau(\tau^2\beta_2)^{-1}\right\}$. Константу ε_0 в (15) возьмем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon_0 + \delta_0 \le \beta_0,$$

$$\varepsilon_0 + \delta_0 \le (\tau^2 \beta_2)^{-1},$$

где δ_0 — достаточно малая константа. При таком выборе ε_0 очевидно, что

$$\frac{1+\tau\varepsilon_0}{1+\tau x_0} < 1.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{Y}^n = \left\|\psi^n\right\|_A^2 + \tau^2 \left\|\omega^n\right\|_A, \;\; \chi_1 = \frac{1+\tau\varepsilon_0}{1+\tau\chi_0}, \;\; \chi_2 = \frac{\alpha_0}{1+\tau\chi_0}.$$

В силу этих обозначений неравенство (15) запишется в следующем виде:

$$\mathrm{Y}^{n+1} \le \chi_1 \mathrm{Y}^n + \tau\chi_2 \left\|f\right\|_{A-1}^2,$$

из этого неравенства с помощью метода математической индукции получим

$$\mathrm{Y}^n \le \chi_1^n \mathrm{Y}^0 + \tau\chi_2 (1+\chi_1+\ldots+\chi_1^n) \left\|f\right\|_{A-1}^2.$$

Отсюда и следует, что

$$\left\|\psi^n\right\|_A^2 + \tau^2 \left\|\omega^n\right\|_A^2 \le \chi_1^n \mathrm{Y}^0 + C_0 \left\|f\right\|_{A-1}^2, \tag{16}$$

где $C_0 = \tau\chi_2 \dfrac{1-\chi_1^{\,n+1}}{1-\chi_1} = \dfrac{\alpha_0}{\chi_0 - \varepsilon_0}$. Теорема доказана.

Теперь исследуем вопрос скорости сходимости итерационного процесса (6)–(9) к решению уравнений (1). Пусть пара функций ω, ψ является решением задачи (1). Обозначим погрешности решения:

$$\omega^n - \omega = W^n, \;\; \psi^n - \psi = \pi^n.$$

На основании уравнений (1) и (6)–(9) получим систему операторно-разностных уравнений вида [2]:

$$\frac{W^{n+\frac12} - W^n}{\tau} + J(\omega^n, \psi^{n+\frac12}) - J(\omega,\psi) + AW^n + B\pi^{n+\frac12} = 0, \tag{17}$$

$$A\pi^{n+\frac12} = W^{n+\frac12}, \tag{18}$$

$$\frac{W^{n+1} - W^{n+\frac12}}{\tau} + A(W^{n+1} - W^n), \tag{19}$$

$$AW^{n+1} = \pi^{n+1}. \tag{20}$$

Преобразуем нелинейные слагаемые следующим образом:

$$J(\omega^n, \psi^{n+\frac12}) - J(\omega,\psi) = J(\omega^n, \psi^{n+\frac12} - \psi^n) + J(W^n,\psi) = J(\omega^n, \pi^{n+\frac12}) + J(W^n,\psi).$$

С учетом этого равенства формулу (17) умножим на $2\pi^{n+\frac12}$ скалярно в H, тогда

$$\left\|\pi^{n+1/2}\right\|_A^2 - \left\|\pi^n\right\|_A^2 + \left\|\pi^{n+1/2} - \pi^n\right\|_A^2 + 2\tau\left(B\pi^{n+1/2},\, \pi^{n+1/2}\right) + 2\tau\left(A\pi^n, A\pi^{n+1/2}\right) + 2\tau\left(J(W^n,\psi),\, \pi^{n+1/2}\right) = 0.$$

Уравнение (19) умножим сперва на $\pi^{n+1} + \pi^{n+1/2}$, затем на $w^{n+1} + w^n$ и, действуя так же, как в случае получения оценки (16), получим следующее тождество [3]:

$$\left\|\pi^{n+\frac12}\right\|_A^2 - \left\|\pi^n\right\|_A^2 + \left\|\pi^{n+\frac12} - \pi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left(\left\|W^{n+1}\right\|_A^2\right) + 2\tau\left\|A\pi^{n+1}\right\|^2 +$$

$$+ 2\tau(B\pi^{n+\frac12}, \pi^{n+\frac12}) + 2\tau(J(W^n,\psi)_2 \pi^{n+\frac12}) = 0. \tag{21}$$

Предполагая выполнение условий а) и неравенства (4), оценим слагаемое $\tau(J(W^n,\psi), \pi^{n+\frac12})$ следующим образом:

$$\tau(J(W^n,\psi), \pi^{n+\frac12}) = \tau\left[(J(W^n,\psi), \pi^{n+\frac12} - \pi^n) + (J(W^n,\psi,\pi^n))\right] \le$$

$$\le \tau C\left(\left\|A\psi\right\| * \left\|W\right\| * \left\|\pi^{n+\frac12} - \pi^n\right\|_A + \left\|\psi\right\|_A * \left\|W^n\right\| * \left\|A\pi^n\right\|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\|\pi^{n+1/2} - \pi^n\right\|_A^2 + \frac{\tau^2 C^2}{2}\|A\psi\|*\left\|W^n\right\|^2 + \tau C_0\|A\psi\|*\left\|W^n\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\pi^{n+1/2} - \pi^n\right\|_A^2 + \frac{\tau\gamma_0}{2}\left\|W^n\right\|^2, \qquad (22)$$

где $\gamma_0 = \tau C^2\|A\psi\|^2 + 2C_0\|A\psi\|$.

Из (21) и (22) получим

$$\left\|\pi^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|\pi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left(\left\|W^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|W^n\right\|_A^2\right) + 2\tau\left\|A\pi^{n+1}\right\|^2 \le \tau\gamma_0\left\|W^n\right\|^2. \qquad (23)$$

Заметим, что

$$2\tau\left\|A\pi^{n+1}\right\|^2 \ge \frac{2}{3}\tau\beta_1\left\|\pi^{n+1}\right\|_A^2 + \frac{2}{3}\tau\beta_2^{-1}\left\|W^{n+1}\right\|_A^2 + \frac{2}{3}\tau\left\|W^{n+1}\right\|^2.$$

С учетом данного неравенства формулу (23) запишем в следующем виде:

$$(1+\frac{2}{3}\tau\beta_0)\left\|\pi^{n+1}\right\|_A^2 + \tau^2(1+\frac{2}{3}(\beta_2\tau)^{-1})\left\|W^{n+1}\right\|_A^2 + \frac{2}{3}\pi\left\|W^{n+1}\right\|^2 \le \left\|\pi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left\|W^n\right\|_A^2 + \tau\gamma_0\left\|W^n\right\|^2$$

или

$$(1+\chi_0)\left(\left\|\pi^{n+1}\right\|_A^2 + \tau^2\left\|W^{n+1}\right\|_A^2\right) + \frac{2}{3}\left\|W^{n+1}\right\|^2 \le \left\|\pi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left\|W^n\right\|_A^2 + \tau\gamma_0\left\|W^n\right\|^2, \qquad (24)$$

где $1+\chi_0 = \min\left\{1+\frac{2}{3}\tau\beta_0,\ 1+\frac{2}{3}(\beta_2\tau)^{-1}\right\} > 1$ [4].

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{X}^n = \left\|\pi^n\right\|_A^2 + \tau^2\left\|W^n\right\|_A^2,$$

$$Y_n = (1+\chi_0)X^n,$$

$$\frac{2}{3}\tau\left\|W^{n+1}\right\|^2 = Z^{n+1}.$$

Тогда соотношение (24) может быть представлено в виде

$$\mathrm{Y}^{n+1} + \mathrm{Z}^{n+1} \le \frac{1}{1+\chi_0}\mathrm{Y}^n + \frac{3\gamma_0}{2}\mathrm{Z}^n.$$

Предположим, что выполняется условие

$$\frac{2}{3} - \gamma_0 \ge \delta > 0, \qquad (25)$$

т.е. $\gamma_1 = \frac{3\gamma_0}{2} \prec 1$. Следовательно, из предыдущего неравенства следует, что

$$\mathrm{Y}^n + \mathrm{Z}^n \le \alpha^n(\mathrm{Y}^0 + \mathrm{Z}^0), \text{ где } \alpha_0 = \max(\frac{1}{1+\chi_0}, \gamma_1) < 1.$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия а)–в), (4) и (25), где $\gamma_0 = 2C\|\psi\|_A^2 + \tau C_h^2\|A\psi\|^2$. Тогда имеет место оценка

$$\left\|\pi^{n+1}\right\|_A^2 + \tau^2\left\|W^{n+1}\right\|_A^2 + \frac{2}{3}\tau\left\|W^{n+1}\right\|^2 \le \alpha_0^{n+1}\left(\left\|\pi^0\right\|_A^2 + \tau^2\left\|W^0\right\|_A^2 + \frac{2}{3}\tau\left\|W^0\right\|_A^2\right),$$

где $\alpha_0 < 1$, т.е. итерационный процесс (6)–(9) сходится к решению задачи (1).

Замечание: Условия а)–в) и неравенство (25) эквивалентны достаточному условию единственности решения задачи (1).

Список литературы

1. *Ладыженская О.А., Ривкинд В.Я.* О сходящихся разностных схемах для уравнений. Навье-Стокса // Численный метод механики сплошных сред. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1971. — Т. 3. — № 1. — С. 55–73.

2. *Данаев Н.Т., Смагулов Ш.* Об одной методике численного решения уравнения Навье-Стокса в переменные (ψ,ω). Численные методы механики сплошных сред // РЖ. — Серия ВМ. — № 2. — С. 27–35.

3. *Смагулов Ш.* Математические вопросы приближенных методов для уравнений Навье-Стокса: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1988. — 380 с.

4. *Алибиев Д.Б.* Об одном методе приближенного решения уравнения Навье-Стокса // Математическая кибернетика и управления движениями. — Алматы, 1991. — С. 39–44.

ӘОЖ 37.01:378.096:004

Д.Р.Бейсенова, Р.Ж.Төлеуханова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

ДЕМОНСТРАЦИЯЛЫҚ МЫСАЛДАР ӘДІСІ НЕГІЗІНДЕ ПРОГРАММАЛАУДЫ ОҚЫТУ

В статье рассматривается метод демонстрационных примеров в обучении программированию на языке Си. На примере операций сложения, вычитания, логических, условных операций и выражений выявлены преимущества данного метода.

There is method of demonstrational example in the learning to program by C language is considered in this article. It shown this method is worth of operating addition, substraction, logical and conditional operation.

Ақпараттық оқу модельдері — демонстрациялық мысалдар — модельдердің жаңа класы, оларда дәстүрлі оқу және компьютерлік оқыту модельдерінің қасиеттері бар. Демонстрациялық мысалдар әдісін негізінде тек қана программалауды оқыту барысында ғана емес, информатиканың басқа бөлімдерін оқыту кезінде де қолдануға болады.

Демонстрациялық мысалдар әдісін қолдану студенттерді программаны оқуға үйретуге мүмкіндік береді. Басқа адамдар жазған программаларды оқу дағдысы программаның дұрыстығын анықтаудың, программаның прагматикалық аспектісін табу, оларды модификациялау және өзіндік программаларды верификациялау үшін негіз болып табылады. Жеке дидактикалық әдістердің әр түрлілігі оқытудың арнайы әдістері деп аталады, олар нақты пәндік облыстың мәнін анық көрсетеді.

Демонстрациялық мысалдар әдісі — бұл демонстрациялық мысалдар (компьютерлік оқу модельдері) қолдануға негізделген оқыту әдісі. «Компьютерлік оқу модельдері» түсінігі, В.В.Лаптев және М.В.Швецкийлердің анықтауынша, ақпараттық модель негізінде біріктірілген құбылыс пен зерттеудің оқыту объектісінің қарым-қатынасынан тұратын программалық орта [1].

Си тілінің операцияларын түсіндіруді демонстрациялық мысалдар негізінде келесі түрде көрсетуге болады.

Қосу және азайту операциялары

Тілде қосу мен азайтудың дәстүрлі емес екі операциясы бар, олар ++ және – – деп белгіленеді. ++ операциясы операндаға 1-ді қосады, ал – – 1-ді алады. Бұл операциялар өз операндаларының алдында немесе соңында қолданылуы мүмкін. Олар өрнекте әр түрлі амал жасайды: ++n жазуы n мәнін қолданбай тұрғанда үлкейтеді, ал n++ жазуында n-нің мәні қолданылғаннан кейін үлкейеді. Егер n=5 болса, m=++n операторы орындалған соң m-нің мәні 6-ға, ал m=n++ орындалған соң m=5. Екі жағдайда да n=6. Бірінші мысал n=n+1; m=n тізбегіне сәйкес, ал екінші жағдайда: m=n; n=n+1 тізбегіне сай. Азайту операциясы тура солай. Екі операцияның да басымдылығы арифметикалық операциялар арасында ең кішісі. 1 программа осы командаларды қолдануды көрсетеді.

Разрядты логикалық операциялар бүтін сан немесе таңбаның бөлек биттерімен жұмыс істеу үшін арналған:

& — разрядты ЖӘНЕ
^ — НЕМЕСЕ разрядты болдырмау
>> — оңға жылжу
| — разрядты НЕМЕСЕ
<< — солға жылжу