УДК 517.51

С. Битимхан

Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза
(E-mail:bsamat10@mail.ru)

Абсолютная суммируемость рядов Фурье функции из классов Бесова

В статье изучены вопросы абсолютной суммируемости рядов Фурье. Доказано достаточное условие абсолютной суммируемости тригонометрического ряда Фурье функции из класса Бесова. Получено обобщение этого достаточного условия для более широкого класса.

Ключевые слова: функция, тригонометрический ряд, ряд Фурье, абсолютная суммируемость, классы Бесова.

Пусть $L_p(1 \leq p < +\infty)$ обозначает пространство всех 2π- периодических, измеримых по Лебегу функций $f(x)$, для которых $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$.

Модулем гладкости порядка $r > 0$ функции $f \in L_p$ в метрике соответствующего пространства называют функцию $\omega_r(f;t)_p = \sup\limits_{|h|\leq t} \|\Delta_h^r f(\cdot)\|_p = \sup\limits_{|h|\leq t} \left(\int_0^{2\pi} \left|\sum\limits_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} C_r^\nu f(x+\nu h)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Через $E_n(f)_p$ обозначается наилучшее приближение функции $f \in L_p$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n в метрике пространства L_p $E_n(f)_p = \inf\limits_{T_n} \|f - T_n\|_p$.

Пусть $1 \leq \theta < +\infty$, $r > 0$. Будем считать, что $f(x)$ принадлежит функциональному классу Бесова $B_{p,\theta}^r$, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r\theta-1}\omega_r^\theta\left(f;\frac{1}{n}\right)_p$, при этом $\|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \|f\|_p + \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r\theta-1}\omega_r^\theta\left(f;\frac{1}{n}\right)_p\right)^{\frac{1}{\theta}}$.

Рассмотрим тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$.

Положим, что $A_n^{(\beta)} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n)}{n!}$; $\beta-$ действительное; $n-$ натуральное число.

Сумма

$$\sigma_n^{(\beta)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{(\beta)} \left(A_n^{(\beta)}\right)^{-1} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

называется $(C;\beta)$ средним ряда (1). Ряд (1) называется $|C;\beta|_k$ - суммируемым, $k \geq 1$, в точке $x \in [0;2\pi)$, если (см. [1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sigma_n^{(\beta)}(x) - \sigma_{n-1}^{(\beta)}(x)\right|^k n^{k-1} < +\infty.$$

Вопросами $|C;\beta|_k$ - суммируемости занимаются многие математики мира. В частности, И.Салаи в [1] доказала ряд достаточных условий абсолютной суммируемости ряда Фурье функции $f \in L_p$ в терминах наилучшего приближения и модуля гладкости этой функции. Необходимое и достаточное условие $|C;\beta|_\lambda$ - суммируемости ряда Фурье функций класса H_p^ω рассмотрено в [2]. Вопросы абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье исследованы в [3].

Теперь приведем доказанные нами теоремы.

Теорема 1. Если числа p, θ, r, β, k удовлетворяют следующим условиям: $1 < p \le 2$, $1 \le \theta < +\infty$, $1 \le k \le p$, $k < \theta$, $-1 < \beta < \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$, $\frac{1}{p} < \beta + r$, то ряд Фурье функции $f \in B^r_{p,\theta}$ будет $|C;\beta|_k$= суммируем почти всюду на $[0;2\pi)$.

Доказательство. Пусть $f \in B^r_{p,\theta}$. Оценим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1} E_n^k(f)_p.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1} E_n^k(f)_p \le C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1} \omega_r^k\left(f;\frac{1}{n}\right)_p =$$

$$= C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\theta r-1)\frac{k}{\theta}} \omega_r^k\left(f;\frac{1}{n}\right)_p \cdot n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1} n^{-(\theta r-1)\frac{k}{\theta}} =$$

$$= C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\theta r-1)\frac{k}{\theta}} \omega_r^k\left(f;\frac{1}{n}\right)_p n^{k\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta}-\beta-r\right)-1}.$$

Теперь, пользуясь неравенством Гельдера, с показателями $q = \frac{\theta}{k} > 1$, $q' = \frac{q}{q-1} = \frac{\theta}{\theta-k}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1} E_n^k(f)_p \le$$

$$\le C \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta r-1} \omega_r^\theta\left(f;\frac{1}{n}\right)_p\right)^{\frac{k}{\theta}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\left(k\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta}-\beta-r\right)-1\right)\frac{\theta}{\theta-k}}\right)^{\frac{\theta-k}{\theta}}.$$

Так как $f \in B^r_{p,\theta}$ и по условию теоремы $\frac{1}{p} < \beta + r$, то из последнего неравенства получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1} E_n^k(f)_p < +\infty.$$

Тогда по теореме 1 работы [2] ряд Фурье функции $f \in B^r_{p,\theta}$ будет $|C;\beta|_\lambda$= суммируем почти всюду на $[0;2\pi)$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 анонсирована в [4].

Если функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию: существует число τ такое, что $\alpha(t)t^\mu \downarrow$ при $t \downarrow 0$, по крайней мере, для всех $\mu < \tau$ и $\alpha(t)t^\nu \uparrow$ при $t \downarrow 0$, по крайней мере, для всех $\nu > \tau$, то эта функция удовлетворяет γ-условию, σ- условию для $\sigma > \tau - 1$ и λ- условию для $\lambda < \tau - 1$.

Через $B(p,\theta,r,\alpha)$ обозначим класс функций $f \in L_p$, для которых (см. [5])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^2} \omega_r^\theta\left(f;\frac{1}{n}\right)_p < \infty,$$

при этом

$$\|f\|_{B(p,\theta,r,\alpha)} = \|f\|_p + \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^2} \omega_r^\theta\left(f;\frac{1}{n}\right)_p\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Класс функций $B(p,\theta,r,\alpha)$ шире, чем класс $B^r_{p,\theta}$, и при $\alpha(t) = t^{-r\theta-1}$ совпадает с этим классом.

Теорема 2. Пусть функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию: существует число τ такое, что $\alpha(t)\cdot t^{\mu}\downarrow$ при $t\downarrow 0$, по крайней мере, для всех $\mu<\tau$ и $\alpha(t)t^{\nu}\uparrow$ при $t\downarrow 0$, по крайней мере, для всех $\nu>\tau$. Если числа $p,\theta,r,k,\beta,\mu,\tau$ удовлетворяют следующим условиям: $1<p\le 2$, $1\le\theta<+\infty$, $1\le k\le p$, $k<\theta$, $-1<\beta<\frac{1}{p'}=1-\frac{1}{p}$, $\theta\left(\frac{1}{p}-\beta\right)<\mu<\tau<r\theta+1$, то ряд Фурье функции $f\in B(p,\theta,r,\alpha)$ будет $|C;\beta|_k=$ суммируем почти всюду на $[0;2\pi)$.

Доказательство. Пусть $f\in B(p,\theta,r,\alpha)$. Аналогично доказательству теоремы 1 оценим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1}E_n^k(f)_p.$$

Получим следующие оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1}E_n^k(f)_p\le C\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1}\omega_r^k\left(f;\frac{1}{n}\right)_p=$$

$$=C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\omega_r^k\left(f;\frac{1}{n}\right)_p\alpha^{\frac{k}{\theta}}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^{\frac{2k}{\theta}}}\right]\left[n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1}n^{\frac{2k}{\theta}}\alpha^{-\frac{k}{\theta}}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Отсюда, так как $\frac{\theta}{k}>1$, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1}E_n^k(f)_p\le$$

$$\le C\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}\omega_r^{\theta}\left(f;\frac{1}{n}\right)_p\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2}\right]^{\frac{k}{\theta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{k\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{\theta}-\beta\right)-1}\alpha^{-\frac{k}{\theta}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{\theta}{\theta-k}}\right]^{\frac{\theta-k}{\theta}}\le$$

$$\le C\cdot\|f\|^k_{B(p,\theta,r,\alpha)}\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1+\frac{k\theta(1-\beta p)}{p(\theta-k)}}}{\alpha^{\frac{k}{\theta-k}}\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^{\frac{\theta-k}{\theta}}=C\cdot\|f\|^k_{B(p,\theta,r,\alpha)}\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1+\frac{k\theta(1-\beta p)}{p(\theta-k)}-\frac{\mu k}{\theta-k}}}{\left(\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^{\mu}}\right)^{\frac{k}{\theta-k}}}\right]^{\frac{\theta-k}{\theta}}.$$

По условию теоремы существует число τ такое, что $\alpha(t)\cdot t^{\mu}\downarrow$ при $t\downarrow 0$, по крайней мере, для всех $\mu<\tau$. Поэтому отсюда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k\left(\frac{1}{p}-\beta\right)-1}E_n^k(f)_p\le C\cdot\|f\|^k_{B(p,\theta,r,\alpha)}\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{p\mu k-k\theta+k\beta p\theta}{p(\theta-k)}}}\right]^{\frac{\theta-k}{\theta}}.$$

Так как по условию теоремы $\theta\left(\frac{1}{p}-\beta\right)<\mu$, то $\frac{p\mu k-k\theta+k\beta p\theta}{p(\theta-k)}>0$. Значит, последний ряд сходится. Тогда опять же по теореме 1 работы [2] теперь ряд Фурье функции $f\in B(p,\theta,r,\alpha)$ будет $|C;\beta|_{\lambda}=$ суммируем почти всюду на $[0;2\pi)$.

Теорема доказана.

Замечание. При $\alpha(t)=t^{-r\theta-1}$, $r>0$, $1\le\theta<+\infty$, из теоремы 2 следует теорема 1.

Список литературы

1 *Салаи И.* Об абсолютной суммируемости тригонометрических рядов // Матем. заметки. — 1981. — Т. 39. — № 6. — С. 823–837.

2 *Акишев Г.А., Битимхан С.* Модули гладкости и абсолютная суммируемость кратных тригонометрических рядов // Математический журнал. — 2003. — Т. 3. — № 1(17). — С. 5–14.

3 *Akishev G., Bitimkhan S.* The conditions of absolute summability of multiple trigonometric series // Advancements in Mathematical Sciences: proceedings of the International Conference on Advancements in Mathematical Sciences (Antalya, November, 5–7, 2015). — Vol. 1676. — Doi: 10.1063/ 1.4930521.

4 *Битимхан С.* Достаточное условие абсолютной суммируемости ряда Фурье функции из пространства Бесова // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию профессора К.Ж.Наурызбаева (Алматы, 9 - 10 декабря 2014 г.). — С. 12, 13.

5 *Потапов М.К.* О вложении и совпадении некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. Математика. — 1969. — Т. 33. — С. 840–860.

С. Бітімхан

Бесов кластарында жататын функциялардың Фурье қатарларының абсолютті қосындылануы

Мақалада Фурье қатарларының абсолютті қосындылану сұрақтары зерттелді. Бесов класында жататын функцияның тригонометриялық Фурье қатарының абсолютті қосындылануының жеткілікті шарты дәлелденген. Осы жеткілікті шарттың бұдан да кеңірек класс үшін жалпыламасы алынған.

S. Bitimkhan

Absolute summability of Fourier series of function from Besov's classes

In this work it is studied questions of an absolute summability of Fourier series. The sufficient condition of an absolute summability of a trigonometrical Fourier series of function from Besov's class is proved. Generalization of this sufficient condition for wider class is received.

References

1 Salay I. *Math. notes*, 1981, 39, 6, p. 823-837.

2 Akishev G.A., Bitimkhan S. *Mathematical Journal*, 2003, 3, 1(17), p. 5–14.

3 Akishev G., Bitimkhan S. *Advancements in Mathematical Sciences*: proceedings of the International Conference on Advancements in Mathematical Sciences (Antalya, November, 5–7, 2015), 1676, doi: 10.1063/ 1.4930521.

4 Bitimkhan S. *Function theory, functional analysis and their applications*: materials of the international scientific conference devoted to the 80-year anniversary of professor K.Zh. Nauryzbaev (Almaty, December 9–10, 2014), p. 12, 13.

5 Potapov M.K. *Izvestiya the USSR Academy of Sciences, Series Mathematics*, 1969, 33, p. 840–860.