Δ -ЙОНСОНОВСКИЕ ФРАГМЕНТЫ ЙОНСОНОВСКИХ МНОЖЕСТВ

Ешкеев А.Р., д.ф-м.н., профессор;
Муканов А.А., к.ф-м.н., доцент; Медеубаев Н.К., ст. преподаватель
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова
г. Караганда, Республика Казахстан

В этой статье рассмотрены йонсоновские фрагменты йонсоновских множеств. Основным методом исследования данной работы является семантический метод для йонсоновских теорий . Его сущность заключается в переносе теоретико-модельных свойств центра на саму теорию.

Ключевые слова: йонсоновские множества, йонсоновские теория, йонсоновский фрагмент, экзистенциальный замкнутый модель, категоричность.

Данная статья посвящена изучению специального вида позитивных теорий, являющихся фрагментом некоторого йонсоновского множества.

Множество X называется йонсоновским в теории T , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1) X есть $\Sigma -$определимое подмножество C;
2) dcl (X) есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

Дадим определения йонсоновского фрагмента:

Будем говорить, что все $\forall\exists$-следствия произвольной теории образуют йонсоновский фрагмент этой теории, если дедуктивное замыкание этих $\forall\exists$ - следствий есть йонсоновская теория.

В силу того, что это не всегда верно, было бы интересно уметь выделять у произвольной теории такую часть, которая будет йонсоновской теорией. Такая задача имеет место быть, хотя бы в силу того, что морлизация произвольной теории нам это обеспечивает, более того, полученная теория совершенна[9].

Другой путь это использование такого факта, что любая счетная модель индуктивной теории обязательно вложится изоморфно в некоторую экзистенциально замкнутую модель рассматриваемой теории [9] .Далее рассматриваем все $\forall\exists$- предложения истинные в этой модели. Тогда в случае йонсоновской теории хорошо известен тот факт, что $\forall\exists$ -предложения истинные в данной экзистенциально замкнутой модели образуют йонсоновскую теорию.

Полученная в этом случае йонсоновская теория будет называться йонсоновским фрагментом соответствующего йонсоновского множества. Понятно, что мы можем проводить исследование йонсоновских фрагментов относительно связи с первоначальной теорией, что является новой постановкой задачи исследовании йонсоновских теорией.

Рассмотрим категоричные Δ -йонсоновские теории, которые являются фрагментом некоторого йосоновского множества.

Вначале мы хотим напомнить понятие Δ -йонсоновских теорий (Δ -J). В том случае, если при некотором фиксированном Δ , в определении рассматриваемой $\Delta - PJ$ теории [1] заменить все Δ -продолжения на Δ -погружения,то мы получим определение Δ -йонсоновских теорий(Δ -J).Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличии от (Δ -PJ) теорий,которые могут быть вообще говоря и не йонсоновскими. В нашем случае это не так,так как продолжения всегда являются вложениями.

Далее мы предполагаем, что мы работаем только с теориями, которые фрагменты некоторого йонсоновского множества.

Пусть *L* язык первого порядка. *At* – есть множество атомарных формул данного языка. $B^{+}(At)$ – замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^{+}(At))$ – есть множество формул в пренексном нормальном виде полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^{+}(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^{+}(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^{+})$ – это произвольная булева комбинация формул из L^{+}. Таким образом в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда $\Delta = B(At)$ мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$-аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле) считаются известными и их можно извлечь, например, в [1].

Следующий результат можно найти в работе Сарацино [2]:

Теорема 1. Если L – счетный язык и T полная ω-категоричная теория, то T имеет ω-категоричный модельный компаньон.

При изучении йонсоновских теорий главным инструментом их исследования является семантический метод, который заключается в следующем: элементарные свойства центра йонсоновской теории «транслируются» на саму теорию. При этом элементарная теория семантической модели йонсоновской теории аналогична позитивной робинсоновской теории, и является инвариантом этой йонсоновской теории, так как все семантические модели одной и той же йонсоновской теории элементарно эквивалентны между собой.

Следующее определение принадлежит Макинтайру [3].

Теория T позитивно модельно полна, если T модельно полна и каждая экзистенциональная L-формула эквивалентна в T некоторой позитивно экзистенциональной L-формуле.

Модель $A \in ModT$ называется простой (simple) в $ModT$, если каждый нетривиальный морфизм из A в B, где $B \in ModT$, является инъективным.

Из работы Вайспфенинга [4] можно извлечь следующий результат:

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

i) T позитивно модельно полна.

ii) T модельно полна и каждая T-модель является простейшей в $ModT$.

Легко заметить, что позитивная робинсоновская теория в смысле [5], [6] является обобщением понятия оболочки Кайзера T^0 для йонсоновской теории T. В случае, когда $\Delta = B(At)$ и Δ -J теория совершенна, следует, что понятие семантической модели для позитивной йонсоновской теории и универсальной области из [5], [6] совпадают. С помощью этого замечания, мы хотим доказать результат описывающий счетно категоричные Δ -йонсоновские теории.

Теорема 3. Пусть T – Δ -J-теория. Пусть F фрагмент произвольного йонсоновского подмножества семантической модели T, который является

Δ -J-теорией и T^* есть центр теории F.

Тогда следующие условия эквивалентны:

3) Теория T^* – ω-категорична;

4) ТеорияT – ω-категорична.

Доказательство.$1) \Rightarrow 2)$.

1) Пусть $T^* = Th(C)$ – ω-категорична, гдеC – T-универсальная T-однородная модель теории T. Она существует в силу того, что T, в частности, является йонсоновской теорией. Так как T^* полная, то в силу теоремы 1, T^* имеет ω-категоричный модельный компаньон T^*. В силу модельной совместности T и T^*, T^* и $T^{*'}$, и так как отношение быть модельно совместным транзитивно, мы имеем, что $T^{*'}$ модельно совместна с T. Из этого следует, что $T^{*'}$ является модельным компаньоном T. По теореме Робинсона о единственности модельного компаньона, следует, что $T^* = T^{*'}$. Следовательно, T^* модельно полна и следовательно теория T – совершенна. Тогда в силу критерия о совершенности йонсоновских теорий, получим, что $E_T = ModT^*$. Отсюда, так как T^* ω- категорична по условию, следует, что в E_T всего одна счетная модель с точностью до изоморфизма. Обозначим эту модель через D. Пусть A счетная не экзистенционально замкнутая произвольная модель теории T не изоморфная D. Тогда в силу индуктивности теории, модель A Δ -продолжается в некоторуюB, где $B \in (E_T)^+$. Так как рассматриваемая теория является йонсоновской, мы имеем, что $(E_T)^+ \supseteq E_T$. Покажем обратное включение. Из того, что T^*

модельно полна в силу совершенности и так как $E_T = ModT^*$, следует, что любая модель теории T^* является простейшей, тогда T^* позитивно модельно полна. Тогда, по определению любая $\exists$-формула эквивалентна некоторой позитивной $\exists$-формуле. Следовательно, $(E_T)^+ \subseteq E_T$. Таким образом, $(E_T)^+ = E_T$. Тогда и в $(E_T)^+$ только одна счетная модель с точностью до изоморфизма, то есть $B \cong D$. Тогда в *B* содержится Δ-начало изоморфное*A*, что противоречит предположению о том, что А не изоморфно *D*. Таким образом, $T\omega$ - категорична.

$2) \Rightarrow 1)$. Пусть $T\omega$-категорична. Предположим противное, то есть в $ModT^*$ существуют две счетные неизоморфные модели. Обозначим их *A* и *B*. Так как $T \subseteq T^*$, то $ModT^* \subseteq ModT$, а следовательно, так как *A* и *B* из $ModT^*$, то получаем противоречие с ω-категоричностью *T*.

Далее мы рассмотрим несчетно категоричные Δ-J-теории, Дадим следующие определения из работы [7].

Формула $\varphi(\overline{x})$ называется Δ^+-формулой относительно теории*T*, если существуют позитивно - экзистенциональные формулы $\psi_1(\overline{x})$ и $\psi_2(\overline{x})$ такие, что $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$ и $T \models (\neg\varphi \leftrightarrow \psi_2)$.

Мы будем говорить, что теория *T* допускает R_1^+, если для любой позитивно экзистенциональной формулы $\varphi(\overline{x})$ совместной с *T* существует формула $\psi(\overline{x}) \in \Delta^+$ совместна с *T* такая, что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Счетная модель теории *T* называется счетно-алгебраически универсальной моделью, если в неё Δ-погружаются все счетные модели данной теории.

Модель A является Δ-алгебраически простой моделью теории *T*, если A является моделью теории *T* и A может быть Δ-погружена в каждую модель теории *T*.

Δ-J-теория называется универсальной если её аксиомы позитивно-универсальны.

Следующие результаты содержатся в [7].

Теорема 4.Пусть*T* – универсальная теория полная для экзистенциональных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда *T* имеет алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ)-атомная.

Теорема 5. Пусть T $\forall\exists$-теория полная для экзистенциональных предложений, допускающая R_1. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T имеет алгебраически простую модель,
2) T имеет (Σ, Δ)-атомную модель,
3) T имеет (Δ, Σ)-атомную модель,
4) T имеет Δ-nice алгебраически простую модель,
5) T имеет единственную алгебраически простую модель.

где условие R_1 следующее: если для любой экзистенциональной формулы $\varphi(\overline{x})$ совместной с T существует формула $\psi(\overline{x}) \in \Delta$ совместна с T такая, что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$, а формула $\varphi(\overline{x})$ называется Δ-формулой относительно теории T, если существуют экзистенциональные формулы $\psi_1(\overline{x})$ и $\psi_2(\overline{x})$ такие, что $T \models (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$ и $T \models (\neg\varphi \leftrightarrow \psi_2)$.

Как следствие можно получить следующие результаты относительно Δ-J- теории.

Теорема 6. Пусть T – универсальная Δ-J- теория, полная для позитивных экзистенциональных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Пусть *F* фрагмент произвольного йонсоновского подмножества семантической модели *T*, который является универсальной Δ-J-теорией.

Тогда T имеет Δ-алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ^+)-атомная.

Теорема 7. Пусть F есть фрагмент,являющийся Δ -J-теорией полной для позитивно экзистенциональных предложений, допускающая R_1. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) F имеет Δ -алгебраически простую модель,

5) F имеет (Σ, Δ^+) -атомную модель,

6) F имеет единственную Δ -алгебраически простую модель.

Пусть $A, B \in (E_T)^+$ и $A \underset{\neq}{\subset} B$. Тогда B называется Δ -алгебраически простым модельным расширением A в $(E_T)^+$, если для любой модели $C \in (E_T)^+$ из того, что A Δ -погружается в C следует, что B Δ -погружается в C.

Следующий классический результат Морли из [8] описывает ω_1-категоричные теории на языке простых расширений.

Теорема 8.

Полная теория T ω_1-категорична тогда и только тогда, когда любая её счетная модель имеет простое собственное элементарное расширение.

Следующий результат является обобщением этой теоремы.

Теорема 9.

Пусть T – универсальная Δ -J-теория полная для позитивных экзистенциональных предложений, для которой выполняется R_1^+ и $\Delta = B(At)$ Пусть F фрагмент произвольного йонсоновского подмножества семантической модели T, который является универсальной Δ -J-теорией и T^* ее центр.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T^* ω_1-категорична,

2) любая счетная модель из $(E_F)^+$ имеет Δ -алгебраически простое модельное расширение в $(E_F)^+$.

Доказательство:

$1) \Rightarrow 2)$ Если T^* ω_1 -категорична, то она совершенна в силу теоремы Морли о несчетной категоричности. Тогда в силу критерия совершенности йонсоновской теории мы имеем, что теория T^* модельно полна и $ModT^* = E_T$. В этом случае следует, что $E_F = (E_F)^+$. Если теория T^* модельно полна, то любое Δ -погружение является изоморфным вложением. А в силу модельной полноты T^* элементарным. Так как T^* - полная теория, то, применяя к ней вышеуказанную теорему 8, получаем требуемое.

$2) \Rightarrow 1)$ Обращаясь к семантической модели C теории T (она существует так как T – йонсоновская теория), получим, что модель C – ω-универсальная. Её мощность, вообще говоря, больше чем счетная. Поэтому рассмотрим её счетную элементарную подмодель D. В силу того, что C экзистенционально замкнута, её элементарная подмодель D тоже экзистенционально замкнута. Отсюда имеем, что она счетно- алгебраически универсальна. Теперь остается применить теорему 8, согласно которой теория T имеет Δ -алгебраически простую модель A_0. Определим по индукции $A_{\delta+1}$, которая будет Δ -алгебраически простым модельным расширением модели A_δ и $A_\lambda = \cup\{A_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Тогда пусть $A_\lambda = \cup\{A_\delta \mid \delta < \omega_1\}$. Предположим, что $B \models T$ и $cardB = \omega_1$. Для того чтобы показать, что $B \approx A$, разложим B в цепь $\{B_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ счетных моделей. В силу йонсоновости теорииT это возможно. Определим функцию $g : \omega_1 \to \omega_1$ и цепь $\{f_\delta : A_{g\delta} \to B_\delta \mid 0 < \delta < \omega_1\}$ Δ -погружений индукцией по δ:

1. $g0 = 0$ и $f_0 : A_0 \to B_0$.

$$2.\ g\lambda = \bigcup\{g\delta \mid \delta < \lambda\} \text{ и } f_\lambda = \bigcup\{f_\delta \mid \delta < \lambda\}.$$

3. $f_{\delta+1}$ равна объединению цепи $\{f_\delta^\gamma \mid \gamma < \rho\}$, которая определяется индукцией по γ .

$$4.\ f_{\delta+1}^0 = f_\delta, f_{\delta+1}^\lambda = \bigcup\{f_{\delta+1}^\gamma \mid \gamma < \lambda\}.$$

5. Предположим, что $f_1^\gamma : A_{g\delta+\gamma} \to B_{\delta+1}$. Если $f_{\delta+1}^\gamma$ – отображение на, то $\rho = \gamma$. В противном случае в силу Δ -алгебраической простоты $A_{g\delta+\gamma+1}$ можно продолжить $f_{\delta+1}^\gamma$ до

$$f_{\delta+1}^{\gamma+1} : A_{g\delta+\gamma+1} \to B_{\delta+1}.$$

$$6.\ g(\delta+1) = g\delta + \rho.$$

Ясно, что $f = \bigcup\{f_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ отображает (Δ -погружает) A в B . Так как B - произвольная модель теории *T*, а A – единственная Δ -алгебраически простая и позитивно экзистенционально замкнутая модель в силу условия и построения, то отсюда следует, что $(E_F)^+$ в несчетной мощности имеет единственную модель, значит семантическая модель теории T насыщенна, то есть йонсоновская теория T совершенна. Отсюда следует, что $ModT^* = (E_F)^+$. Следовательно, T^* – ω_1 -категорична.

Литература:

1.Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. (учебное пособие). Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 250с.

2.Saracino D. Model companion for ω-categorical theories// Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 39, P.591-598.

3. A. Macintyre. Model-completeness for sheaves of structures.FundamentaMathematicae, vol. 81 (1973). - pp. 73-89

4. Volker Weispfenning. The model-theoretic significance of complemented existential formulas. The Journal of Symbolic Logic, Volume 46, Number 4, Dec. 1981. - pp. 843 – 849

5.Itay Ben-Yaacov. Positive model theory and compact abstract theories.Journal of Mathematical Logic 3 (2003), no. 1. - pp. 85-118

6.Itay Ben-Yaacov.Compactness and independence in non first order frameworks.Bulletin of Symbolic logic, volume 11 (2005), no. 1. – pp. 28-50

7.Baldwin J.T. Kueker D.W. Algebraically prime models. Ann. Math. Logic.1981, 20.- p. 289-330.

8. Дж. Сакс. Теория насыщенных моделей. – М.: Мир, 1976. – 192 с.

9. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/Под ред. Дж.Барвайса. - Ч.1.Теория моделей: пер. с англ. - М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 126с.

МАЛЫЕ МОДЕЛИ ВЫПУКЛЫХ ФРАГМЕНТОВ ЙОНСОНОВСКИХ МНОЖЕСТВ

Ешкеев А.Р., д.ф-м.н., профессор;
Фёдорова Я.А., магистрант; Москаленко О.А., магистрант
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова
г. Караганда, Республика Казахстан

В этой статье рассмотрены некоторые виды атомных моделей Δ -М теорий в обогащённой сигнатуре. Для этих теорий приведен критерий $(n+1)$ - Δ -позитивной экзистенциально замкнутой атомности с помощью существования специальных видов атомных моделей. Основным методом исследования данной работы является семантический метод для йонсоновских теорий. Его сущность заключается в переносе теоретико-модельных свойств центра на саму теорию.

Ключевые слова: йонсоновские множества, йонсоновская теория, йонсоновский фрагмент, малые модели, категоричность, выпуклые йонсоновские множества.