

Об интегрируемости с весом двойных рядов по мультипликативным системам с коэффициентами из класса $R_0^+ BVS^2$

В 2002 году Л.Лейндлер ввел в обиход новый класс последовательностей, называемый $R_0^+ BVS$, который является расширением класса монотонных последовательностей. В работе рассмотрена задача нахождения необходимых и достаточных условий интегрируемости в p -той степени сумм двойных рядов с коэффициентами из класса $R_0^+ BVS^2$ по мультипликативным системам с весом γ . В качестве решения наложены условия на коэффициенты $\{\lambda_n\}$, которые в зависимости от γ являются достаточными или необходимыми.

Ключевые слова: двойные ряды, мультипликативные системы, Лейндлер, последовательность, система Прайса, преобразование Абеля, сумма.

В работе изучаются вопросы интегрируемости с весом ряда

$$f(x, y) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} a_{k_1 k_2} \chi_{k_1}(x) \chi_{k_2}(y). \quad (1)$$

Запишем следующее определение (см. [1]). Нуль-последовательность положительных чисел $c := \{c_n\}$ принадлежит классу $R_0^+ BVS$, если неравенство $\sum_{n=m}^{\infty} |c_n - c_{n+1}| \leq K \cdot c_m$ справедливо для всех натуральных m . Класс таких последовательностей был введен Лейндлером в [1].

Через $g(x)$ обозначим сумму ряда $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$. В работе С.Ю.Тихонова [2] найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости в p -той степени сумм синус- и косинус-рядов с коэффициентами из класса $R_0^+ BVS$ с весом γ . Эти результаты сформулированы в следующей теореме.

Теорема А. Пусть $\{\lambda_n\} \in R_0^+ BVS$ и $1 \leq p < \infty$.

А) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-p-1+\varepsilon_1}\}$ является почти убывающей, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n n^{p-2} \lambda_n^p < \infty \quad (2)$$

достаточно для выполнения условия

$$|\gamma(x)| |g(x)|^p \in L(0, \pi). \quad (3)$$

Б) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$ является почти возрастающей, то условие (2) необходимо для выполнения условия (3).

Функция $\gamma(x)$ определяется по последовательности $\{\gamma_n\}$ следующим образом: $\gamma(\pi/n) := \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$, и существуют положительные константы A и B такие, что $A\gamma_n \leq \gamma(x) \leq B\gamma_{n+1}$ для $x \in (\pi/n+1, \pi/n)$. Последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$ называется почти возрастающей (почти убывающей), если неравенство $C\gamma_n \geq \gamma_m$ ($\gamma_n \leq C\gamma_m$) справедливо для всех натуральных $n \geq m$.

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, разные в различных формулах.

В статье получен двумерный аналог теоремы А для двойных рядов по мультипликативным системам.

Прежде чем сформулировать результаты, приведем необходимые определения.

Для начала приведем определение мультипликативной системы Прайса (см. [3]). Пусть $P = \{p_1, p_2, \dots, p_j, \dots\}$, $p_j \geq 2$, $j = 1, 2, \dots$, — произвольная последовательность натуральных чисел; $G(P) = \{x = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots\}, 0 \leq x_j \leq p_j - 1, j = 1, 2, \dots\}$ — множество целочисленных последовательностей с целочисленными координатами. Если в множестве G ввести операцию сложения $\dot{+}$ как покоординатное

$$x \dot{+} y = \left\{ (x_j + y_j) \pmod{p_j} \right\}_{j=1}^{\infty}, \text{ где } x = \{x_j\} \in G; y = \{y_j\} \in G,$$

то множество G становится группой.

Операция, обратная к групповой операции $\dot{+}$, определена как покоординатное вычитание по модулю p_j , т.е.

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x_j - y_j, & \text{если } x_j \geq y_j; \\ x_j - y_j + p_j, & \text{если } x_j < y_j. \end{cases}$$

Мультипликативная система функций на группе G определяется следующим образом.

Положим

$$m_0 = 1, m_j = \prod_{s=1}^j p_s, \quad (4)$$

где p_s — члены последовательности P . Любое целое число $n \geq 1$ единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{j=1}^{k(n)} n_j m_{j-1}, \quad (5)$$

где n_j — целые и $0 \leq n_j \leq p_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Положим

$$\chi_0(x) = 1, \chi_{m_j}(x) = \exp \frac{2\pi i x_{j+1}}{p_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in G$, $i = \sqrt{-1}$.

Определим

$$\chi_n(x) = \prod_{j=1}^{k(n)} (\chi_{m_{j-1}}(x))^{n_j} = \exp \left(2\pi i \sum_{j=0}^{k(n)} \frac{n_j x_j}{p_j} \right). \quad (6)$$

Так определенная на группе G система функций $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой Прайса. Она мультипликативна и ортонормированна на G .

Определение 1. Говорят, что последовательность положительных чисел $a := \{a_{jk}\}$, удовлетворяющая условию $a_{jk} \rightarrow 0$ при $j+k \rightarrow \infty$, принадлежит классу $R_0^+ BVS^2$, если выполняются неравенства

$$\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq C a_{mn} \text{ при всех } m, n \in N$$

и

$$\sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{10} a_{jk}| \leq C a_{mk} \quad k,$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{01} a_{jk}| \leq C a_{jn} \text{ при каждом фиксированном } j,$$

где

$$\Delta_{11} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1};$$

$$\Delta_{10} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k};$$

$$\Delta_{01} a_{jk} = a_{jk} - a_{j,k+1}.$$

Определение 2. Говорят, что последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_{mn}\}$ почти возрастает (почти убывает), если для некоторой константы $C > 0$ и для всех натуральных $m_2 \geq m_1, n_2 \geq n_1$ выполнено неравенство

$$C\gamma_{m_2 n_2} \geq \gamma_{m_1 n_1} \left(\gamma_{m_2 n_2} \leq C\gamma_{m_1 n_1} \right).$$

Пусть функции $\gamma(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены следующим образом:

$$\gamma\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\right) = \gamma_{k_1 k_2}, \quad \varphi\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\right) = \varphi_{k_1, k_2} \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} \exists A > 0, B > 0, C > 0, D > 0;$$

$$A\gamma_{k_1 k_2} \leq \gamma(x, y) \leq B\gamma_{k_1+1, k_2+1} \quad \text{для } x \in \left(\frac{1}{k_1+1}, \frac{1}{k_1}\right), \quad y \in \left(\frac{1}{k_2+1}, \frac{1}{k_2}\right);$$

$$C\varphi_{m_{k_1}, m_{k_2}} \leq \varphi(x, y) \leq D\varphi_{m_{k_1+1}, m_{k_2+1}} \quad \text{для } x \in \left(\frac{1}{m_{k_1+1}}, \frac{1}{m_{k_1}}\right), \quad y \in \left(\frac{1}{m_{k_2+1}}, \frac{1}{m_{k_2}}\right).$$

Сформулируем результаты.

Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ — сумма ряда (1), $\{a_{mn}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \leq p < \infty$, и последовательность положительных чисел $\{\gamma_{k_1 k_2}\}$ удовлетворяет условию: \exists некоторые $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{k_1 k_2} \cdot k_1^{-1+\varepsilon_1}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k_2 и последовательность $\{\gamma_{k_1 k_2} \cdot k_2^{-1+\varepsilon_2}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k_1 , то условие

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \gamma_{k_1 k_2} \cdot (k_1 \cdot k_2)^{p-2} \cdot a_{k_1 k_2}^p < \infty$$

достаточно для выполнения условия

$$\gamma(x, y) \cdot |f(x, y)|^p \in L(0, 1)^2.$$

Теорема 2. Пусть $f(x, y)$ — сумма ряда (1), $\{a_{k_1 k_2}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \leq p < \infty$, и последовательность $\{\varphi_{k_1 k_2}\}$ удовлетворяет условию: существуют некоторые $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ такие, что последовательность $\{\varphi_{k_1 k_2} \cdot k_1^{p-1-\varepsilon_3}\}$ почти возрастает при фиксированном k_2 и $\{\varphi_{k_1 k_2} \cdot k_2^{p-1-\varepsilon_4}\}$ почти возрастает при фиксированном k_1 и пусть $\varphi(x, y) \cdot |f(x, y)|^p \in L(0, 1)^2$.

Тогда сходится ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \chi_{k_1, k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\frac{1}{m_{k_1} m_{k_2}} \sum_{k_1=1}^{m_{k_1}-1} \sum_{k_2=1}^{m_{k_2}-1} a_{k_1 k_2} \right)^p < \infty.$$

Для доказательства теорем потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\{a_n \geq 0\}, \{\lambda_n \geq 0\}, p \geq 1$, тогда верны следующие неравенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{v=1}^n a_v \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{v=n}^{\infty} \lambda_v \right)^p; \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{v=n}^{\infty} a_v \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} a_n^p \left(\sum_{v=1}^n \lambda_v \right)^p. \tag{8}$$

Доказательство этих неравенств можно найти в [4].

Лемма 2. Пусть $f(x, y)$ — сумма ряда (1), $\{a_{k_1 k_2}\} \in R_0^+ BVS^2$. Тогда

$$|f(x, y)| \leq C \cdot \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q a_{jk}$$

при $x \in \left[\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right), \quad y \in \left[\frac{1}{q+1}, \frac{1}{q}\right).$

Доказательство леммы 1. Представим $f(x, y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) + \sum_{j=p}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=q}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) + \sum_{j=p}^{\infty} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4; \\ |f(x, y)| &\leq |J_1 + J_2 + J_3 + J_4| \leq |J_1| + |J_2| + |J_3| + |J_4|. \end{aligned}$$

На основании преобразования Абеля (см. [3; 149]) и неравенства $|D_j(x)| \leq \frac{C}{x} \quad \forall x \in (0, 1), k=0, 1, 2, \dots$, и учитывая, что $\{a_{mn}\} \in R_0^+ BVS^2$, а также $|\chi_j(x)| = 1$, оценим J_1, J_2, J_3, J_4 :

$$|J_1| = \left| \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right| \leq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk}.$$

Оценим

$$|J_2| = \left| \sum_{j=p}^{\infty} \sum_{k=q}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right|.$$

Сначала применим преобразование Абеля к конечной сумме

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=p}^m \sum_{k=q}^n a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right| &\leq \frac{1}{xy} \left(\sum_{j=p}^{m-1} \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{11} a_{jk}| + \sum_{j=p}^{m-1} |\Delta_{10} a_{jn}| + \sum_{j=p}^{m-1} |\Delta_{10} a_{jq}| + \right. \\ &\left. + \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{01} a_{mk}| + \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{01} a_{pk}| + |a_{mn}| + |a_{pn}| + |a_{mq}| + |a_{pq}| \right). \end{aligned}$$

Оценим некоторые слагаемые, учитывая, что $\{a_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$ при каждом фиксированном i и j :

$$\begin{aligned} \sum_{j=p}^{m-1} |\Delta_{10} a_{jn}| &= \sum_{j=p}^{m-1} |a_{jn} - a_{j+1,n}| \leq C \cdot a_{pn} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \quad a_{pn} \rightarrow 0; \\ \sum_{j=p}^{m-1} |\Delta_{10} a_{jq}| &= \sum_{j=p}^{m-1} |a_{jq} - a_{j+1,q}| \leq C \cdot a_{pq} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \quad a_{pn} \rightarrow 0; \\ \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{01} a_{mk}| &= \sum_{k=q}^{n-1} |a_{mk} - a_{m,k+1}| \leq C \cdot a_{mq}, \text{ при } m \rightarrow \infty; \\ \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{01} a_{pk}| &= \sum_{k=q}^{n-1} |a_{pk} - a_{p,k+1}| \leq C \cdot a_{pq} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Так как при $p \geq m$ и $q \geq n$

$$a_{pq} = \left| \sum_{i=p}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} \Delta_{11} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=p}^{\infty} \sum_{j=q}^{\infty} |\Delta_{11} a_{ij}| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} |\Delta_{11} a_{ij}| \leq a_{mn},$$

то

$$|J_2| \leq \frac{1}{xy} \sum_{j=p}^{m-1} \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq \frac{C}{xy} a_{pq} \leq C \cdot p \cdot q \cdot a_{pq} \leq \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q a_{jk}.$$

Аналогично оценим J_3 :

$$\begin{aligned} |J_3| &= \left| \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=q}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right| \\ \left| \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=q}^n a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right| &\leq \frac{1}{xy} \left(\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{11} a_{jk}| + \sum_{j=0}^{p-1} |\Delta_{10} a_{jn}| + \sum_{j=0}^{p-1} |\Delta_{10} a_{jq}| + \right. \\ &\left. + \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{01} a_{pk}| + \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{01} a_{0,k}| + |a_{pn}| + |a_{0,n}| + |a_{pq}| + |a_{0,q}| \right). \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$|J_3| \leq \frac{1}{xy} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=q}^{n-1} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq \frac{C}{xy} a_{0,q}.$$

Далее для J_4 :

$$|J_4| = \left| \sum_{j=p}^{\infty} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right|;$$

$$\left| \sum_{j=p}^m \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \right| \leq \frac{1}{xy} \left(\sum_{j=p}^{m-1} \sum_{k=0}^{q-1} |\Delta_{11} a_{jk}| + \sum_{j=p}^{m-1} |\Delta_{10} a_{j,q-1}| + \sum_{j=p}^{m-1} |\Delta_{10} a_{j0}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{q-1} |\Delta_{01} a_{mk}| + \sum_{k=0}^{q-1} |\Delta_{01} a_{pk}| + |a_{m,q-1}| + |a_{p,q-1}| + |a_{m,0}| + |a_{p,0}| \right).$$

При $m \rightarrow \infty$ получаем

$$|J_4| \leq \frac{1}{xy} \sum_{j=p}^{m-1} \sum_{k=0}^{q-1} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq \frac{C}{xy} a_{p,0}.$$

Итак,

$$|f(x, y)| \leq \left[\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} + \frac{C}{xy} (a_{pq} + a_{0q} + a_{p0}) \right] \leq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} + C \cdot p \cdot q (a_{pq} + a_{0q} + a_{p0}).$$

Но в силу того, что $\{a_{jk}\}$ почти убывает

$$p \cdot q \cdot a_{pq} \leq \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^q a_{ik}$$

и

$$p \cdot q \cdot a_{0q} \leq \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^q a_{ik}, \quad p \cdot q \cdot a_{p0} \leq \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^q a_{ik}.$$

Следовательно, при $\frac{1}{x} < p$, $\frac{1}{y} < q$ имеем

$$|f(x, y)| \leq C \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q a_{jk}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. На основании леммы 1 имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 \gamma(x, y) |f(x, y)|^p dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \gamma(x, y) |f(x, y)|^p dx dy \leq$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^n a_{k_1 k_2} \right)^p \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \gamma(x, y) dx dy \leq$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn} \left(\sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^n a_{k_1 k_2} \right)^p \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} dx dy \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}}{m^2 n^2} \left(\sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^n a_{k_1 k_2} \right)^p.$$

Далее дважды применим неравенство (8). Сначала в неравенстве (8) положим $\lambda_n = \frac{\gamma_n}{n^2}$, $a_k = a_{k_2}$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}}{n^2} \left(\sum_{k_2=0}^m \sum_{k_1=0}^n a_{k_1 k_2} \right)^p \right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}}{n^2} \left(\sum_{k_2=0}^n a_{mk_2} \right)^p \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} (a_{mk_2})^p \left(\frac{\gamma_{mk_2}}{k_2^2} \right)^{1-p} \left(\sum_{n=k_2}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}}{n^2} \right)^p \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^m a_{k_1 k_2} \right)^p \left(\frac{\gamma_{mk_2}}{k_2^2} \right)^{1-p} \left(\sum_{n=k_2}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}}{n^2} \right)^p \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\left(\sum_{n=k_2}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}}{n^2} \right)^p \leq C \left(\frac{\gamma_{mk_2}}{k_2^2} \right)^p,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^m a_{k_1 k_2} \right)^p \left(\frac{\gamma_{mk_2}}{k_2^2} \right)^{1-p} \left(\sum_{n=k_2}^{\infty} \frac{\gamma_{mn}}{n^2} \right)^p \right) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^m a_{k_1 k_2} \right)^p \cdot \frac{\gamma_{mk_2}}{k_2^2} \right) = \\ &= \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k_1=0}^m a_{k_1 k_2} \right)^p \cdot \frac{\gamma_{mk_2}}{k_2^{2-p}} = \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^{2-p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mk_2}}{m^2} \left(\sum_{k_1=0}^m a_{k_1 k_2} \right)^p \right) \leq \\ &\leq \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^{2-p}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1 k_2}^p \cdot \left(\frac{\gamma_{k_1 k_2}}{k_1^2} \right)^{1-p} \sum_{m=k_1}^{\infty} \frac{\gamma_{mk_2}}{m^2} \right)^p. \end{aligned}$$

Так как

$$\left(\sum_{m=k_1}^{\infty} \frac{\gamma_{mk_2}}{m^2} \right)^p \leq C \left(\frac{\gamma_{k_1 k_2}}{k_1^2} \right)^p,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^{2-p}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1 k_2}^p \cdot \left(\frac{\gamma_{k_1 k_2}}{k_1^2} \right)^{1-p} \sum_{m=k_1}^{\infty} \frac{\gamma_{mk_2}}{m^2} \right)^p &= \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^{2-p}} \cdot \frac{1}{k_1^{2-p}} a_{k_1 k_2}^p \gamma_{k_1 k_2} = \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2} k_2^{p-2} a_{k_1 k_2}^p \gamma_{k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2} k_2^{p-2} a_{k_1 k_2}^p \gamma_{k_1 k_2} < \infty,$$

то

$$\gamma(x, y) \cdot |f(x, y)|^p \in L(0, 1)^2$$

и

$$\iint_{0,0}^{1,1} \gamma(x, y) \cdot |f(x, y)|^p dx dy \leq C \cdot \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2} k_2^{p-2} a_{k_1 k_2}^p \gamma_{k_1 k_2}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала покажем, что при выполнении условия теоремы $f(x, y) \in L(0, 1)^2$.

Действительно, используя неравенство Гельдера при $p \in (1, \infty)$, получим

$$\iint_{0,0}^{1,1} |f(x, y)| dx dy \leq \left(\iint_{0,0}^{1,1} |f(x, y)|^p \varphi(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_{0,0}^{1,1} (\varphi(x, y))^{-\frac{q}{p}} dx dy \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $q = \frac{p}{p-1}$. Далее, используя определение и условие теоремы на функцию $\varphi(x, y)$, оценим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y)^{\frac{-q}{p}} dx dy &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{m_{k+1}}}^{\frac{1}{m_k}} \int_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} \left(\frac{1}{\varphi(x, y)} \right)^{\frac{1}{p-1}} dx dy \leq \\ &\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi_{m_l, m_n}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \int_{\frac{1}{m_{l+1}}}^{\frac{1}{m_l}} \int_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} dx dy = C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi_{m_l, m_n}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{1}{m_l} - \frac{1}{m_{l+1}} \right) \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}} \right) = \\ &= C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varphi_{m_l, m_n}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \frac{1}{m_{l+1}} \cdot \frac{1}{m_{n+1}} = C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m_l^{p-1-\varepsilon_3} \cdot m_n^{p-1-\varepsilon_3}}{\varphi_{m_l, m_n} \cdot m_l^{p-1-\varepsilon_3} \cdot m_n^{p-1-\varepsilon_3}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{m_{l+1}} \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \leq \\ &\leq C \frac{1}{\varphi_{m_0, m_0}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_l^{1-\frac{\varepsilon_3}{p-1}} \cdot m_n^{1-\frac{\varepsilon_4}{p-1}} \cdot 2^{-l-n} = C \frac{1}{\varphi_{m_0, m_0}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_l^{\frac{-\varepsilon_3}{p-1}} \cdot m_n^{\frac{-\varepsilon_4}{p-1}} \leq C_1. \end{aligned}$$

Из условия теоремы следует, что последовательность $\{\varphi_{k_1 k_2} \cdot k_1^{p-1-\varepsilon_3} \cdot k_2^{p-1-\varepsilon_4}\}$ почти возрастает. Так как при $p=1$

$$\varphi_{l_2 n_2} l_2^{-\varepsilon_3} n_2^{-\varepsilon_4} \geq \varphi_{11},$$

то

$$\varphi_{l_2 n_2} \geq \varphi_{11} m_2^{\varepsilon_3} n_2^{\varepsilon_4} \geq \varphi_{11}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dx dy &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{l+1}}^{\frac{1}{l}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{|f(x, y)| \varphi(x, y)}{\varphi(x, y)} dx dy \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_{ln}} \int_{\frac{1}{l+1}}^{\frac{1}{l}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(x, y)| \varphi(x, y) dx dy \leq \frac{C}{\varphi_{11}} \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \varphi(x, y) dx dy < C_2. \end{aligned}$$

Итак, $f(x, y) \in L(0,1)^2$. Обозначим через

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, u) dt du.$$

Тогда (см. [3])

$$F\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_n}\right) = m_l^{-1} m_n^{-1} \int_0^{\frac{1}{m_l}} \int_0^{\frac{1}{m_n}} f(x, y) D_{m_l}(x) D_{m_n}(y) dx dy = m_l^{-1} m_n^{-1} \sum_{i=0}^{m_l-1} \sum_{j=0}^{m_n-1} a_{ij}. \quad (9)$$

Далее оценим ряд, используя (9):

$$\begin{aligned} J &\equiv \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\frac{1}{m_{k_1} m_{k_2}} \sum_{v_1=1}^{m_{k_1}-1} \sum_{v_2=1}^{m_{k_2}-1} a_{v_1 v_2} \right)^p \leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(F\left(\frac{1}{m_{k_1}}, \frac{1}{m_{k_2}}\right) \right)^p = \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\int_0^{\frac{1}{m_{k_1}}} \int_0^{\frac{1}{m_{k_2}}} |f(t, u)| dt du \right)^p = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\sum_{v_1=k_1}^{\infty} \sum_{v_2=k_2}^{\infty} \int_{\frac{1}{m_{v_1}+1}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2}+1}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(t, u)| dt du \right)^p. \end{aligned}$$

Обозначим

$$f_{v_1 v_2} = \int_{\frac{1}{m_{v_1}+1}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2}+1}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(t, u)| dt du, \quad v_1, v_2 \in N.$$

Далее

$$J = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\frac{1}{m_{k_1} m_{k_2}} \sum_{v_1=1}^{m_{k_1}-1} \sum_{v_2=1}^{m_{k_2}-1} a_{v_1, v_2} \right)^p \leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\sum_{v_1=k_1}^{\infty} \sum_{v_2=k_2}^{\infty} f_{v_1, v_2} \right)^p. \quad (10)$$

Обозначим

$$\sum_{v_1=k_1}^{\infty} \sum_{v_2=k_2}^{\infty} f_{v_1, v_2} = \sum_{v_2=k_2}^{\infty} L_{k_1, v_2}, \quad (11)$$

тогда

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\sum_{v_1=k_1}^{\infty} \sum_{v_2=k_2}^{\infty} f_{v_1, v_2} \right)^p = \sum_{k_1=1}^{\infty} m_{k_1}^{p-1} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_2}^{p-1} \left(\sum_{v_2=k_2}^{\infty} L_{k_1, v_2} \right)^p. \quad (12)$$

Применяем к внутренним суммам неравенства типа Харди (8), полагая

$$\lambda_n = \varphi_{k_1, n} m_n^{p-1}, \quad a_v = L_{k_1, v}.$$

Тогда получим

$$\sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_2}^{p-1} \left(\sum_{v_2=k_2}^{\infty} L_{k_1, v_2} \right)^p \leq \sum_{v_2=1}^{\infty} [\varphi_{k_1 v_2} m_{v_2}^{p-1}]^{1-p} L_{k_1, v_2}^p \left(\sum_{k_2=1}^{v_2} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_2}^{p-1} 2^{k_2(p-1)} \right)^p.$$

Оценим внутреннюю сумму, используя условие теоремы: $\{\varphi_{k_1 k_2} \cdot m_{k_2}^{p-1-\varepsilon_4}\}$ почти возрастает при фиксированном k_1 .

$$\begin{aligned} \sum_{k_2=1}^{v_2} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_2}^{p-1} &= \sum_{k_2=1}^{v_2} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_2}^{p-1-\varepsilon_4} \frac{1}{2^{k_2(p-1-\varepsilon_4)}} 2^{k_2(p-1)} \leq \\ &\leq C \cdot \varphi_{k_1, v_2} m_{v_2}^{p-1-\varepsilon_4} \sum_{k_2=1}^{v_2} \frac{1}{m_{k_2}^{p-1-\varepsilon_4}} m_{k_2}^{p-1} = C \varphi_{k_1, v_2} m_{v_2}^{p-1-\varepsilon_4} \sum_{k_2=1}^{v_2} m_{k_2}^{\varepsilon_4} \leq \\ &\leq C \cdot \varphi_{k_1, v_2} m_{v_2}^{p-1-\varepsilon_4} m_{v_2}^{\varepsilon_4} = C m_{v_2}^{p-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k_2=1}^{v_2} \varphi_{k_1, k_2} m_{k_2}^{p-1} \left(\sum_{v_2=k_2}^{\infty} L_{k_1, v_2} \right)^p &\leq C \sum_{v_2=1}^{\infty} [\varphi_{k_1, v_2} m_{v_2}^{p-1}]^{1-p} L_{k_1, v_2}^p (\varphi_{k_1, k_2} m_{v_2}^{p-1})^p = \\ &= C \sum_{v_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1, v_2} m_{v_2}^{p-1} L_{k_1, v_2}^p. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, имеем (см. (10–13))

$$J \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} m_{k_1}^{p-1} \sum_{v_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1, v_2} m_{v_2}^{p-1} L_{k_1, v_2}^p = C \sum_{v_2=1}^{\infty} m_{v_2}^{p-1} \sum_{k_1=1}^{\infty} m_{k_1}^{p-1} \varphi_{k_1, v_2} \left(\sum_{v_1=k_1}^{\infty} L_{v_1, v_2} \right)^p.$$

Снова применяем упомянутое неравенство типа Харди (см. (8)) к внутренним суммам, получим (см. (13)):

$$J \leq C \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \varphi_{v_1, v_2} m_{v_1}^{p-1} m_{v_2}^{p-1} f_{v_1, v_2}^p.$$

Если $p \in (1, \infty)$, то по неравенству Гельдера ($q = \frac{p}{p-1}$);

$$\begin{aligned} f_{v_1, v_2}^p &= \left(\int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(x, y)| dx dy \right)^p \leq C \int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(x, y)|^p dx dy \cdot \left(\int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} dx dy \right)^{\frac{p}{q}} \leq \\ &\leq C \int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(x, y)|^p dx dy \cdot \left(\frac{1}{m_{v_1} m_{v_2}} \right)^{\frac{p}{q}} = C \cdot m_{v_1}^{1-p} m_{v_2}^{1-p} \int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(x, y)|^p dx dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\frac{1}{m_{k_1} m_{k_2}} \sum_{v_1=1}^{m_{k_1}-1} \sum_{v_2=1}^{m_{k_2}-1} a_{v_1 v_2} \right)^p \leq \\
 &\leq C \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} f_{v_1 v_2}^p \varphi_{v_1 v_2} m_{v_1}^{p-1} m_{v_2}^{p-1} \leq \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \varphi_{v_1 v_2} m_{v_1}^{p-1} m_{v_2}^{p-1} m_{v_1}^{1-p} m_{v_2}^{1-p} \int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(x, y)|^p dx dy = \\
 &= \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \varphi_{v_1 v_2} \int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(x, y)|^p dx dy \leq \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{m_{v_1+1}}}^{\frac{1}{m_{v_1}}} \int_{\frac{1}{m_{v_2+1}}}^{\frac{1}{m_{v_2}}} |f(x, y)|^p \varphi(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)|^p \varphi(x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы

$$\varphi(x, y) \cdot |f(x, y)|^p \in L(0, 1)^2,$$

то

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1 k_2} m_{k_1}^{p-1} m_{k_2}^{p-1} \left(\frac{1}{m_{k_1} m_{k_2}} \sum_{v_1=1}^{m_{k_1}-1} \sum_{v_2=1}^{m_{k_2}-1} a_{v_1 v_2} \right)^p < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

References

- 1 *Leindler L.* A new class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series // *Analysis Mathematic.* — 2002. — Vol. 28. — № 4. — P. 279–286.
- 2 *Tikhonov S.Yu.* On the integrability of trigonometric series // *Mat. notes.* — 2005. — Vol. 78. — № 3. — P. 476–480.
- 3 *Golubov B., Efimov A., Skvortsov V.* Walsh series and transforms: theory and applications. — M.: Science, 1987. — 344 p.
- 4 *Potapov M.K., Berisha M.* Modules of smoothness and Fourier coefficients of periodic functions of one variable // *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.).* — 1979. — Vol. 26 (40). — P. 215–228.

Ж.Б.Муканов

Коэффициенттері $R_0^+ BVS^2$ класында жататын мультипликатив жүйелер бойынша екі еселі қатарлардың салмақпен интегралдануы

2002 жылы Л.Лейндлер монотон тізбектер класын кеңейтетін $R_0^+ BVS$ тізбектер жаңа класын енгізді. Мақалада келесі есеп қарастырылған: коэффициенттері $R_0^+ BVS^2$ класында жататын мультипликатив жүйелер бойынша екі еселі қатарлардың қосындыларының p -ші дәрежесі салмақпен интегралдануының қажетті және жеткілікті шарттарын табу. Шешімі ретінде γ -ға байланысты қажетті немесе жеткілікті болатын $\{\lambda_n\}$ коэффициенттеріне шарттар қойылған.

Zh.B.Mukanov

On the integrability with power of double series by multiplicative systems with coefficients from $R_0^+ BVS^2$ class

Per 2002 L.Leindler has entered a new class of sequences named $R_0^+ BVS$ which is expansion of a class of monotonous sequences into the use. In work the following problem is considered: to find necessary and sufficient conditions integrability in p -that degrees of the sums of double series with factors from a class $R_0^+ BVS^2$ on multiplicative systems with weight γ . As the decision conditions on factors $\{\lambda_n\}$ which depending on γ , are sufficient or necessary are imposed.