Т.С.Григорьева, Т.В.Заикина

## Математиканы оқытуда алмаспайтын есептер әдісін қолдану

Мақалада мектептегі математика және олардың шешімдері курсындағы есептер алмаспайтын есептер әдісімен қарастырылады. Бұнда оқушылардың сезгіштігін дамытуға, негізделген қорытындыларын жасауға мүмкіндік беретін есептер ұсынылған. Оқушыларды математикалық жағынан дамыту мақсатымен әр түрлі сыныптарда бір есеп қарастырылған. Бұл маңызды қызығушылықты туындатады, себебі есепті тезірек түсіндіруге, бір әдісті басқамен салыстырғанда тиімділігін көрсетуге болады. Сонымен қатар есепті толық шешуге немесе сұрақтың қойылымын тереңдету мүмкіндігін, есептің басқа шешімдері жоқ екенін көрсетеді.

T.S.Grigorieva, T.V.Zaikina

## The cross-cutting objectives method in mathematic studying

The article is devoted to the tasks in school mathematics and also to the solution by the cross-cutting objectives method. There are the tasks that let develop intuition and make the outputs reasonable. To make mathematical development better there are the same tasks in different courses are described in this article. It's very interesting because it let us understand the task deeper and shows greater effect of the one method over the others. It also let us get the generalized solution of the task or the solution that makes that formulation of the task wider. And it also shows that the task hasn't any other solutions.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев[1], Д.Е.Пальчунов[2]

*[1]Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
*[2]Новосибирский государственный университет, Россия (E-mail: modth1705@mail.ru)*

# Формализации некоторых синтаксических и семантических свойств аналитических йонсоновских теорий предметных областей

В данной статье представлен обзор результатов обоих авторов, связанный с вопросом построения и исследования теоретико-модельных свойств некоторых неполных аналитических теорий предметных областей. Основная цель данной заметки заключена в дальнейшей разработке логической формализации онтологий предметных областей, начатой в [1–3].

*Ключевые слова:* модель, онтология, предметная область, язык формализации, исчисление предикатов, решетка, йонсоновская теория.

*Введение.* В данной статье представлены результаты, связанные с дальнейшей разработкой логической формализации онтологий предметных областей, начатой в [1], и данная работа предполагает, что это может оказаться интересным для построения аппарата изучения, вообще говоря, неполных аналитических теорий, что, в свою очередь, тесно связано с построением теорий предметных областей. Все определения теоретико-модельных понятий, связанных с онтологией предметных областей, считаются известными, определенными как в [1]. В случае, если в [1] они неопределены, то будем считать, что мы это можем сделать на базе [1], так как основные синтаксические и семантические определения там определены.

Выделим два направления в развитии классической теории моделей. В известной книге [2] их называют западной и восточной теориями моделей, так как один из основоположников теории моделей А.Тарский жил на западном побережье США с 1940 г., а другой основоположник А.Робинсон — на восточном. Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множества, и в ней используются все формулы логики первого порядка. Восточная теория моделей развивается в традициях

Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большее два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул. В отличие от западной теории моделей, которая изучает полные теории, восточная теория моделей, вообще говоря, имеет дело с неполными теориями. В смысле полноты рассматриваемой теории максимальное требование, как правило, — экзистенциальная полнота. Всем этим условиям удовлетворяют йонсоновские теории.

В [3] было дано объяснение того факта, почему интересно изучать неполные индуктивные теории. Среди таких теорий важное место занимают йонсоновские теории. К примеру, йонсоновскими являются теории групп, абелевых групп, полей фиксированной характеристики, линейных порядков, булевых алгебр, унаров и полигонов. Таким образом, сделаем вывод, что изучение йонсоновских теорий относится по своей сути к проблематике «восточной» теории моделей.

*Основные принципы формализации онтологий предметных областей.* Формализация понятий является одной из ключевых задач для моделирования на компьютере исследовательской деятельности человека. В настоящее время одним из наиболее мощных средств представления понятий являются онтологии. Они широко применяются как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях.

В инженерию знаний понятие «онтология» пришло из философии. В философии оно означает описание общей структуры мира. В инженерии знаний онтология описывает данную предметную область, или, более точно, данный класс предметных областей. Онтология показывает общее видение таких предметных областей.

В настоящее время много исследований по представлению знаний работает с понятием онтологии. Суммируем то, что разные авторы понимают под словом онтология:

Онтология — это инструмент для моделирования реальности.

Онтология описывает определенную предметную область.

Знание, представленное онтологией, должно быть интерсубъективным (это означает, что все эксперты в данной предметной области должны признавать утверждения, представленные в онтологии этой предметной области).

Онтология должна содержать глоссарий ключевых понятий и спецификацию их смысла.

Таким образом, цель онтологии — описание общих свойств предметной области, не зависящие от ее конкретных реализаций.

В настоящее время имеется огромное количество исследований по онтологиям. Эти исследования можно условно разделить на два направления:

1. Исследование методов построения онтологий конкретных предметных областей; применение онтологий для решения различных задач, связанных в первую очередь моделированием предметных областей.

2. Разработка логических языков и программных средств, направленных на создание и использование онтологий, разработка методов обработки информации, представленной с помощью этих языков.

Первое из указанных направлений исследований по онтологиям по существу является частью инженерии знаний. Для специалистов этого направления онтология — это инструмент моделирования реальности, онтология описывает определенную предметную область. Для точного и гарантированно верного описания некоторой предметной области необходимо сначала, по возможности, полно специфицировать смысл ключевых понятий, терминов, на языке которых специалисты говорят о данной предметной области. Поэтому онтология должна содержать глоссарий ключевых понятий, дающий спецификацию их смысла. Правильность онтологии определяется тем, что все эксперты в данной предметной области должны признавать утверждения, представленные в онтологии этой предметной области; таким образом, знание, содержащееся в онтологии, должно быть интерсубъективным.

Отметим, что в огромном количестве работ по онтологиям, относящихся данному направлению инженерии знаний, указывалась необходимость переиспользования знаний, представленных в онтологии. Поэтому одним из наиболее важных, центральных свойств онтологии предметной области является то, что она должна описывать общие свойства предметной области, не зависящие от ее конкретных реализаций.

Второе направление исследований по онтологиям возникло значительно позже первого. В достаточно большой степени это направление связано с деятельностью W3C - WWW-Консорциума, в частности, с его проектом SemanticWeb.

В рамках этого направления основное внимание уделяется средствам представления онтологий: логическим языкам, языкам формализации онтологий, программным средствам, ориентированным на разработку онтологий. Например, WWW-Консорциум в рамках проекта SemanticWeb продвигает язык представления онтологий OWL, основанный на семействе логик DescriptionLogics. Разработка онтологий на языке OWL поддерживается программной системой Protégé.

При этом практически никакого внимания не уделяется тому, какая информация должна быть представлена в онтологии. Может создаться впечатление, что с точки зрения представителей этого направления онтология — это любая информация о предметной области, написанная на языке OWL. Характерно, что в одной из основных работ, лежащих в русле этого направления, — Справочной книге по онтологиям по существу не дается определения онтологии. В качестве определения онтологии (единственного в этой Справочной книге) приводится всё то же краткое, символическое определение Грюбера: «Онтология — это явная спецификация концептуализации».

В настоящее время в рамках этого направления создано достаточно большое количество инструментальных средств разработки и представления онтологий. Это:

Protégé, Protégé-OWL
OilEd
Ontolingua
OntoEdit
WebOnto
OntoSaurus
ODE
и т.д. …

Все они основаны на различных логических средствах. Возникает вопрос — каковы должны и могут быть логические средства представления онтологий? Каков спектр таких средств — от самых простых до самых сложных и выразительных? Возможны следующие варианты ответов на эти вопросы:

– это может быть набор простых отношений между понятиями: например, очень популярные в объектно-ориентированном программировании отношения общее — частное, часть — целое и т.п.;
– в качестве основы языка представления онтологий может быть использована логика описаний (DescriptionLogic);
– и вообще для представления онтологий может быть взят произвольный разрешимый фрагмент логики предикатов (например, универсальные формулы, формулы с ограниченными кванторами и т.п.).

Каковы в таком случае должны быть требования к логическим средствам представления онтологий? В качестве основных можно выделить следующие требования:

– разрешимость — существование алгоритмов проверки доказуемости и эквивалентности формул, непротиворечивости конечных множеств формул;
– эффективность разрешающих алгоритмов;
– наличие уже разработанных пруверов (программ, осуществляющих логический вывод).

Таким образом, следует отметить, что указанные исследования по инструментальным средствам представления онтологий, несмотря на их достаточно большую практическую значимость, по существу не исследуют содержание онтологии, т.е. информацию о предметной области, которая должна быть представлена в онтологии.

При исследовании и разработке онтологий мы имеем дело с двумя основными проблемами:

– что такое онтология — т.е. какую информацию о предметной области она должна содержать;
– каким способом должна быть представлена онтология для эффективной работы с ней (в частности, необходимы разрешимость и не очень большая сложность разрешающих алгоритмов).

Решением последней проблемы, как было отмечено выше, достаточно успешно занимается второе направление в исследовании онтологий. Мы же сконцентрируем наше внимание на первой проблеме. Её мы можем более детально сформулировать в виде следующих вопросов:

Что такое онтология?

Чем отличается онтология от неонтологии?

Какую информацию о предметной области должна содержать онтология?

Исходя из этого, сформулируем основные вопросы определения и формализации онтологий:

Должна ли (может ли) онтология содержать всю известную информацию о предметной области?

Верно ли, что любая информация о предметной области, записанная на языке OWL, может быть включена в онтологию данной предметной области?

Достаточна ли логика описаний (DescriptionLogic) как логическое средство представления онтологий?

Насколько широко возможна автоматизация разработки онтологий, каковы методы такой автоматизации?

Насколько эффективным может быть применение онтологий, какие практические задачи, связанные с моделированием предметных областей, могут быть решены применением онтологий?

Онтология должна описывать общие свойства предметной области, не зависящие от ее конкретной реализации, — это даёт возможность ее повторного использования. Таким образом, онтология предметной области должна содержать только ту информацию, которая является верной для каждого конкретного примера данной предметной области. Поэтому онтология должна содержать только предложения, являющиеся аналитическими в контексте рассматриваемой предметной области. Онтология предметной области должна содержать множество ключевых понятий предметной области и аналитические предложения, определяющие смысл данных ключевых понятий. Идея отличать аналитические и синтетические утверждения принадлежит Канту. Карнап выполнил пересмотр этой идеи и дал точные определения.

Онтология предметной области должна состоять из ключевых понятий предметной области и полного описания значений ключевых понятий. *Формальной онтологией предметной области SD назовём пару* $O = \langle A, \sigma \rangle$, где $\sigma$ *— множество ключевых понятий предметной области; A — множество аналитических предложений, описывающих смысл этих ключевых понятий. Множество T предложений, которые являются верными в каждом примере предметной области, будем называть теорией предметной области SD.*

*Пусть пара* $\langle S, \sigma \rangle$ *является формальной онтологией предметной области O. Множество* $T_a = \{\varphi \mid$ *из S выводимо* $\varphi\}$ *будем называть аналитической теорией предметной области O. Пусть T — теория предметной области O,* $T_a$ *является аналитической теорией O и* $S_e$ *— множества предложений, такие что* $T = T_a \vee S_e$, *т.е.* $T = \{\varphi \mid T_a \cup S_e / \varphi\}$. *Тогда множество* $S_e$ *назовем множеством эвристик данной предметной области O.* Множество эвристик $S_e$ формализует специальное знание экспертов в данной предметной области.

Можно выделить следующие стадии построения эмпирической теории предметной области:

I. Задание множества эмпирических и теоретических терминов (т.е. ключевых понятий).

II. Формулирование определений ключевых понятий.

III. Определение эмпирических постулатов.

После первой стадии мы имеем логическую теорию, после второй стадии возникает аналитическая теория, и только после последней стадии мы получаем эмпирическую теорию.

С теоретико-модельной точки зрения этапы построения теории предметной области будут следующими:

I. Определение множества ключевых понятий — сигнатуры предметной области.

II. Определение глоссария (множества явных и неявных определений) — получаем набор аналитических предложений.

III. Описание реальных фактов — возникает теория предметной области.

После первого этапа мы получаем сигнатуру данной предметной области. Таким образом, после этой стадии значения истинности определены только для логически истинных предложений (и для отрицания таких предложений). Мы получили *логическую теорию* — т.е. множество логически истинных предложений чистого исчисления предиката данной сигнатуры.

После второго этапа мы получаем точный смысл всех элементов сигнатуры. Эти смысловые значения формируются из определений сигнатурных символов. Естественно-языковая форма множества этих определений — это глоссарий предметной области.

И, наконец, после последнего этапа мы получаем теорию данной предметной области. Это — эмпирическая теория, она содержит синтетические эмпирические заявления. Заметим, что предложение, которое является аналитическим в одной предметной области, может быть синтетическим в другой.

Таким образом, с теоретико-модельной точки зрения мы имеем следующие шаги моделирования предметной области и построения теории предметной области:

I. Выбор ключевых понятий предметной области дает теорию класса всех моделей рассматриваемой сигнатуры — множество тождественно истинных предложений. На этом шаге мы получаем тавтологическую теорию Th ($\sigma$) сигнатуры $\sigma$ данной предметной области.

II. Разработка глоссария ключевых понятий определяет теорию класса всех моделей, представляющих мыслимые (вообразимые) случаи данной предметной области. Эта теория является множеством аналитических предложений. На этом шаге мы получаем аналитическую теорию $T_a$ предметной области, также как и онтологию предметной области.

III. Полное описание реального примера предметной области дает теорию предметной области (для этого примера). Полное описание всех реальных примеров предметной области дает теорию класса всех моделей рассматриваемой предметной области — множество синтетических предложений. На этом шаге заканчивается моделирование предметной области.

Различие между построением онтологии предметной области и теории предметной области состоит в количестве шагов: после второго шага дедуктивно замкнутая формальная онтология $<T_a, \sigma>$ полностью построена. Однако необходим третий шаг, чтобы закончить построение теории T предметной области.

Далее мы применим теоретико-модельные методы для разработки подхода к формализации того, как возникают новые понятия. Главная цель — дать на языке теории моделей точное формальное определение глоссария предметной области и исследовать возможность представления смысла понятий при помощи глоссария.

Глоссарий состоит из статей, в которых дается определение ключевых понятий некоторой предметной области. Глоссарий (тезаурус) является наиболее простым и распространенным способом представления смысла ключевых понятий данной предметной области. Тезаурус представляет наиболее простую часть онтологии данной предметной области.

Дадим формальное определение глоссария на языке теории моделей. Пусть $\sigma$ — сигнатура. Последовательность предложений $<\varphi_1, \ldots, \varphi_n>$ назовем *формальным глоссарием (определяющим понятия из* $\sigma$*)*, если выполнено:

а) $\sigma(\varphi_1) \subset \sigma(\varphi_1 \& \varphi_2) \subset \ldots \subset \sigma(\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n) = \sigma$;

б) добавление каждого нового предложения $\varphi_{k+1}$ консервативно расширяет предыдущий набор предложений $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, т.е.

$$\mathrm{Th}\,(\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_k) = \mathrm{Th}\,(\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n) \cap S\,(\sigma(\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_k)).$$

Консервативность расширений наборов предложений является исключительно важной, поскольку при определении новых терминов мы не должны изменять смысл уже определенных понятий (иначе эти предыдущие «определения» не были определениями в строгом смысле).

Явным называется такое определение, в котором один новый сигнатурный символ явно определяется через предыдущие. Возникает вопрос: а нужны ли неявные определения, или, напротив, всегда можно обойтись явными? Всегда ли смысл набора новых понятий предметной области можно задать в виде последовательности явных определений, то есть явного глоссария? Заметим, что, как следует из определения, в явном глоссарии определяется сначала одно понятие, потом второе, затем третье и т.д. То есть каждый раз новое определение содержит только один новый сигнатурный символ.

Поэтому ослабленной версией предыдущего вопроса является следующий — всегда ли можно построить определение новых понятий по одному, таким образом, чтобы каждое определение (пусть даже и неявное) содержало только одно новое понятие?

**Теорема.** Существуют сигнатура $\sigma$, состоящая из имён двух понятий, и предложение $\psi$, определяющее смысл понятий из $\sigma$, для которых нет формального глоссария $<\varphi_1, \varphi_2>$, представляющего предложение $\psi$, такого, чтобы сигнатура $\sigma(\varphi_1)$ состояла из имени одного понятия, а сигнатура $\sigma(\varphi_2)$ — из имени другого понятия.

**Следствие.** Не всегда определения понятий могут быть представлены в виде глоссария, определяющего понятия по одному.

**Следствие.** Не всегда определения понятий могут быть представлены в виде явного глоссария.

Все перечисленные выше определения понятий и развернутые доказательства соответствующих вышеуказанных результатов можно найти в работах [4–15].

При рассмотрении и определении каких-либо теорий фиксированной сигнатуры мы будем придерживаться следующих принципов, сформулированных в [16, 17]:

1. Тезис Мальцева-Тарского [1].

2. Сигнатура — это есть множество логических символов, которые кодируют ключевые понятия рассматриваемых предметных областей.

3. Язык — это множество формул сигнатуры в обычном теоретико-модельном смысле, если в конкретных случаях онтологии предметных областей будет возможность определить лишь предложения, то формулы и, соответственно, типы будут строиться на базе обогащенной сигнатуры. Обогащение будет происходить за счет символов исчисления предикатов логики первого порядка.

4. Описание общих свойств предметной области — это некоторое подмножество языка сигнатуры, не зависящей от ее конкретных реализаций, т.е. онтология предметной области должна содержать информацию, которая является верной для каждого конкретного примера данной предметной области.

5. В рассмотрении онтологии предметных областей должны присутствовать наборы ключевых понятий предметной области, а в описании — только множества аналитических предложений (как в [1]), дающие полное описание значений этих ключевых понятий.

6. Мы всегда будем иметь возможность дать идеальную экспертную оценку об аналитичности рассматриваемого предложения. Как следствие, рассматриваемые теории будут только аналитическими.

Все эти принципы нужны для максимально возможных применений формальных знаний теоретико-модельного характера. Понятно, что абсолютно все ситуации полноты логического характера избежать невозможно хотя бы из того, что тезис Мальцева-Тарского, являющийся отправной точкой, не является теоремой, но и не имеет опровержения. Суть вышеуказанного эмпирического тезиса заключается в том, что всякое формальное описание может быть дано в теоретико-модельных терминах. В связи с тем, что основные знания (онтологии) о предметных областях в реальном времени не полны, то, формализуя эти знания в виде аналитических предложений фиксированной сигнатуры, как правило, мы будем иметь дело с неполной аналитической теорией. Но в этом есть свой положительный момент, так как полная аналитическая теория не может иметь больше одной конечной модели с точностью до изоморфизма, хотя конечные реализации, по сути, и есть интересующая нас семантика. Среди неполных теорий конкретной сигнатуры в силу их необъятности было бы логично ограничиться индуктивными теориями, в связи с тем, что основные алгебраические объекты, как правило, имеют в качестве аксиом $\forall\exists$-предложения. Обращение к алгебраическим примерам (алгебраическим системам фиксированной сигнатуры) естественным образом еще раз связывает нас с вышеуказанным тезисом Мальцева-Тарского. Среди индуктивных теорий особое место занимают йонсоновские теории. К примеру, йонсоновскими являются теории групп, абелевых групп, полей фиксированной характеристики, линейных порядков, булевых алгебр, унаров и полигонов. Йонсоновские теории, вообще говоря, не полны. Таким образом, было бы интересно изучать свойства йонсоновских теорий в рамках построения теорий предметных областей. Одной из классических проблем науки является вопрос классификации объектов изучения по каким-либо общим признакам. В математике роль таких объектов играют множества с заданными на них отношениями. С помощью математической логики эти объекты были связаны с некоторыми множествами формул языка исчисления предикатов. Эта связь между синтаксисом и семантикой фиксированного языка собственно и есть суть теории моделей. Поэтому понятно, что нахождение синтаксических и семантических признаков подобия может быть полезно в классификации теорий предметных областей.

**О решётках формул в йонсоновских теориях.** В этом разделе мы рассмотрим некоторые синтаксические свойства йонсоновских теорий. По договоренности из раздела 1, в силу принципа 6 из [16], мы опускаем в дальнейшем в контексте понятие «аналитичности», так как рассматриваемые теории только аналитические, т.е. дедуктивно замкнутые множества аналитических предложений. При изучении полных теорий одним из основных методов является метод использования свойств топологического пространства $S_n(T)$ ультрафильтров булевой алгебры $F_n(T)$ фиксированной теории T. В случае неполной теории мы можем рассмотреть решетку $E_n(T)$ экзистенциальных формул, которая является подрешеткой булевой алгебры $F_n(T)$. В силу незамкнутости экзистенциальных формул в общем случае относительно булевых логических операций свойства топологического пространства экзистенциальных типов существенно отличается от полного случая. Понятно, что такой подход (ограничение $F_n(T)$ до $E_n(T)$) является обобщением случая, когда мы имеем дело с полными теориями. Так как йонсоновские теории являются, вообще говоря, неполными, было бы интересно рассмотреть свойства решетки экзистенциальных формул в связи с вышеуказанным контекстом (например, как в

[1]). Основным инструментом исследования йонсоновской теории является семантический метод, суть которого заключается в трансляции свойств центрального пополнения на йонсоновский прообраз.

**Решетки экзистенциальных формул.** Введем определения понятий и дадим связанные с ними результаты относительно решеточных свойств экзистенциальных формул, основываясь на [1].

Пусть $L$ — язык первого порядка. Пусть $T$ — индуктивная теория языка $L$. Обозначим через $E_n(L)$ множество всех экзистенциальных формул языка $L$ с $n$ свободными переменными,

$$E(L) = \bigcup_{n<\infty} E_n(L).$$

Пусть $E_n(T)$ — дистрибутивная решетка классов эквивалентности

$$\varphi^T = \left\{\psi \in E_n(L) \middle| T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\right\},\ \varphi \in E_n(L),\ E(T) = \bigcup_{n<\infty} E_n(T).$$

**Определение 1.** Пусть $\varphi^T, \psi^T \in E_n(T)$ и $\varphi^T \cap \psi^T = 0.$ Тогда $\psi^T$ называется дополнением $\varphi^T$, если $\varphi^T \cap \psi^T = 1;$ $\psi^T$ называется псевдо-дополнением $\varphi^T$, если для всех $\mu^T \in E_n(T)\ \varphi^T \cap \mu^T = 0 \Rightarrow \mu^T \le \psi^T;$ $\psi^T$ называется слабым дополнением $\varphi^T$, если для всех

$$\mu^T \in E_n(T)\ \ (\varphi^T \cup \psi^T) \cap \mu^T = 0 \Rightarrow \mu^T = 0.$$

**Определение 2.**

1) $\varphi^T$ называется дополняемым, если $\varphi^T$ имеет дополнение.

2) $\varphi^T$ называется слабо дополняемым, если $\varphi^T$ имеет слабое дополнение.

3) $\varphi^T$ называется псевдо-дополняемым, если $\varphi^T$ имеет псевдо-дополнение.

4) $E_n(T)$ называется дополняемой, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ дополняем.

5) $E_n(T)$ называется слабо дополняемой, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ слабо дополняем.

6) $E_n(T)$ называется псевдо-дополняемым, если каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ псевдо-дополняем.

Далее рассмотрим формулы, устойчивые относительно расширений моделей и подмоделей.

**Определение 3.** Формула $\varphi(x_1,...,x_n)$ называется устойчивой относительно расширений моделей в *Mod T*, если для любых моделей $A$ и $B$ теории $T$ таких, что $A \subset B,$ и для любых $a_1,...,a_n \in A$ из того, что $A \models \varphi[a_1,...,a_n] \Rightarrow B \models \varphi[a_1,...,a_n].$

**Теорема 1.** Формула $\varphi$ устойчива относительно расширений моделей в *Mod T* тогда и только тогда, когда существует экзистенциальная формула $\psi$ такая, что $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

**Определение 4.** Формула $\varphi(x_1,...,x_n)$ называется устойчивой относительно подмоделей в *Mod T,* если для любых моделей $A$ и $B$ теории $T$ таких, что $A \subset B,$ и для любых $a_1,...,a_n \in A$ из того, что $B \models \varphi[a_1,...,a_n] \Rightarrow A \models \varphi[a_1,...,a_n].$

**Теорема 2.** Формула $\varphi$ устойчива относительно подмоделей в *Mod T* тогда и только тогда, когда существует универсальная формула $\psi$ такая, что $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$

Рассмотрим понятие инвариантной формулы и связь между инвариантностью экзистенциальной формулы и дополняемостью её класса в $E(T)$.

**Определение 5.** Формула $\varphi$ называется инвариантной в *Mod T*, если она устойчива одновременно относительно расширений моделей в *Mod T* и относительно подмоделей в *Mod T*.

**Теорема 3.** Экзистенциальная формула $\varphi$ инвариантна тогда и только тогда, когда $\varphi^T$ дополняем в $E(T)$.

**Теорема 4.** Экзистенциальная формула $\varphi$ инвариантна в $Mod(Th_{\forall\exists}(E_T)),$ где $E(T)$ — класс экзистенциально замкнутых моделей теории $T$, тогда и только тогда, когда $\varphi^T$ слабо дополняем в $E(T)$.

Введем необходимые определения и сформулируем известные результаты, которые устанавливают связь между модельной полнотой, элиминацией кванторов, позитивной модельной полнотой теории $T$ и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$.

**Определение 6.** Теория $T$ называется модельно полной, если $T \cup \Delta_A$ полна в языке $L_A$ для любой модели $A$ теории $T$.

**Теорема 5.**

1) Теория $T$ модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно подмоделей в *Mod T*.

2) Теория $T$ модельно полна тогда и только тогда, когда каждая формула устойчива относительно расширений моделей в *Mod T*.

**Определение 7.** Говорят, что теория $T$ допускает элиминацию кванторов в $L$, если для каждой формулы $\varphi(x_1,...,x_n)$ языка $L$ существует бескванторная формула $\psi(x_1,...,x_n)$ такая, что

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)).$$

**Теорема 6.** Пусть $T$' — модельный компаньон теории $T$, где $T$ — универсальная теория. В этом случае $T$' — модельное пополнение $T$, если и только если теория $T$ допускает элиминацию кванторов.

Пусть $T$' — модельный компаньон теории $T$. В этом случае $T$' — модельное пополнение $T$, если и только если теория $T$ обладает свойством амальгамируемости.

**Определение 8** [5]. Теория $T$ называется подмодельно полной, если $T \bigcup \Delta_A$ полна в $L_A$ для любой подмодели $A$ модели теории $T$.

**Теорема 7.** Теория $T$ подмодельно полна тогда и только тогда, когда $T$ допускает элиминацию кванторов.

**Теорема 8.** Теория $T$ подмодельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение.

**Определение 9.** Теория $T$ называется позитивно модельно полной, если она модельно полна и каждая экзистенциальная формула языка $L$ эквивалентна в $T$ позитивной экзистенциальной формуле.

В следующих теоремах, полученных в работе [1], устанавливается связь между вышеопределенными понятиями и свойствами решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$.

**Теорема 9.** Теория $T$ позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

**Теорема 10.** Теория $T$ имеет модельный компаньон тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ слабо дополняема.

**Определение 10.** Решетка называется алгеброй Стоуна, если для любого её элемента верно следующее: псевдо-дополнение от псевдо-дополнения элемента равно самому элементу.

**Теорема 11.** Теория $T$ имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

**Теорема 12.** Теория $T_\forall$ имеет модельное пополнение тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

**Йонсоновские теории, их центры и их связь на языке свойств решеток экзистенциальных формул этих теорий.** Рассмотрим йонсоновские теории и установим связь между свойствами йонсоновской теории, центрального пополнения йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории. Для этого мы будем использовать результаты из [17].

Дадим следующие определения.

**Определение 11.** Теория $T$ называется йонсоновской, если

1) $T$ имеет бесконечную модель;

2) $T$ $\forall\exists$ -аксиоматизируема;

3) $T$ обладает свойством совместного вложения (JEP), то есть любые две модели $A \vDash T$ и $B \vDash T$ изоморфно вкладываются в некоторую модель $C \vDash T$;

4) $T$ обладает свойством амальгамируемости (AP), т.е. если для любых $A,B,C \vDash T$) таких, что $f_1 : A \to B,\ f_2 : A \to C$ — изоморфные вложения, существуют $D \vDash T$, изоморфные вложения $g_1 : B \to D,\ g_2 : C \to D$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

**Определение 12.** Семантической моделью $C_T$ йонсоновской теории $T$ называется $\omega^+$ — однородная-универсальная модель теории $T$ [1].

Следующие определения даны в [1].

**Определение 13.** Пусть $k \geq \omega$. Модель $M$ теории $T$ называется

– $k$-универсальной для $T$, если каждая модель $T$ мощности строго меньше $k$ и изоморфно вкладывается в $M$;

– $k$-однородной для $T$, если при любых двух моделях $A$ и $A1$ теории $T$, являющихся подмоделями $M$, мощности строго меньше $k$, и изоморфны $f : A \to A_1$, для каждого расширения $B$ модели $A$, являющегося подмоделью $M$ и моделью $T$, мощности строго меньше $k$, существуют расширение $B_1$ модели $A_1$, являющееся подмоделью $M$, и изоморфизм $g : B \to B_1$, продолжающий $f$.

**Определение 14.** Однородной-универсальной для $T$ моделью называется $k$-однородная-универсальная для $T$ модель мощности $k$, где $k \geq \omega$.

**Определение 15.** Центром (центральным пополнением) йонсоновской теории $T$ называется $T^* = Th(C_T)$.

**Определение 16.** Йонсоновская теория $T$ называется совершенной, если каждая семантическая модель $C_T$ является насыщенной моделью $T^*$.

В [4] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и существованием её модельного компаньона. В дальнейшем нам будут необходимы следующие утверждения.

**Теорема 13.** Пусть $T$ — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– $T$ совершенна;

– $T$ имеет модельный компаньон.

В [2, 16] была установлена связь между полнотой и модельной полнотой йонсоновской теории.

**Теорема 14.** Пусть $T$ — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

– $T$ полна;

– $T$ модельно полна.

В [17] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и свойствами решетки $E_n(T)$. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 15.** Пусть $T$ — полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– $T$ совершенна;

– $T^*$ модельно полна;

– $E_n(T)$ — булева алгебра,

где полнота теории для $\exists$-предложений означает, что любые две модели этой теории относительно экзистенциальных предложений не отличаются друг от друга.

В связи с вышеуказанными результатами относительно введенных понятий нами получены результаты, связывающие понятия из [1] с йонсоновскими теориями.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории $T$ и позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории $T$.

**Теорема 16.** Пусть $T$ — полная для $\exists$-предложений йонсоновская теория, $T^*$ — центр теории $T$. Тогда

$T^*$ допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение;

$T^*$ позитивно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия совершенности йонсоновской теории $T$.

**Теорема 17.** Пусть $T$ — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– $T$ совершенна;

– $E_n(T)$ слабо дополняема;

– $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

В следующей теореме в терминах решетки формул найдены необходимые и достаточные условия йонсоновости центра йонсоновской теории.

**Теорема 18.** Пусть $T$ — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– $T^*$ — йонсоновская теория;

– каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение.

При изучении свойств моделей полных теорий первого порядка полезными являются сведения о булевых алгебрах (алгебрах Линденбаума-Тарского) $F_n(T)$, $n \in \omega$, теории $T$. В связи с этими булевыми алгебрами $F_n(T)$, $n \in \omega$, хорошо известен вопрос и А.Д.Тайманова (можно ознакомиться в [4]:

(*) Какими свойствами должны обладать булевы алгебры $B_n$, $n \in \omega$, чтобы существовала полная теория $T$, такая что $B_n$ была изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$?

В [4] Т.Г.Мустафиным были даны ответы на частные случаи этого вопроса. Им были получены следующие результаты:

**Теорема 19.** [19] Для любой булевой алгебры $B$ существует такая полная теория $T$, что:

а) $B \cong F_1(T)$;

б) если $B$ конечная, то $T$ категорична в счетной мощности;

в) если стоуновское пространство алгебры $B$ счетно, то $T$ тотально трансцендентна.

**Теорема 20** [19]. Для того, чтобы для конечных булевых алгебр $B_1, B_2$ существовала такая категоричная в счетной мощности теория $T$, что $F_1(T) \cong B_1$, $F_2(T) \cong B_2$, необходимо и достаточно, чтобы число атомов $B_2$ было больше квадрата числа атомов $B_1$.

В связи с этим мы будем говорить, что вопрос (*) решается положительно для теории $T$, если существует такая последовательность булевых алгебр $B_n$, $n \in \omega$, что $B_n$ изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$.

Мы рассмотрим вышеуказанный вопрос в рамках изучения неполных теорий, а именно: в классе йонсоновских теорий. Хорошо известно, что, работая с йонсоновскими теориями, в некоторых случаях мы имеем возможность ограничить себя экзистенциальными формулами и экзистенциально-замкнутыми моделями рассматриваемой йонсоновской теории. В этом случае вместо алгебр Линденбаума-Тарского $F_n(T)$, $n \in \omega$, следует рассматривать решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$, $n \in \omega$.

В дальнейшем мы будем опираться на следующий критерий совершенности йонсоновских теорий, который является главным при описании теоретико-модельных свойств совершенных йонсоновских теорий.

**Теорема 21.** Пусть $T$ — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $T$ совершенна;

2) $T^*$ — модельный компаньон $T$;

3) $Mod\, T^* = E_T$;

4) $T^* = T^f$,

где $E_T$ — класс $T$ — экзистенциально замкнутых моделей $T$; $T^0$ — оболочка Кайзера (максимальная $\forall\exists$-теория, взаимно модельно совместная с $T$); $T^f = Th(F_T)$, где $F_T$ — класс генерических моделей $T$ (в смысле конечного форсинга Робинсона); $T^M$ — модельный компаньон йонсоновской теории $T$. Известны следующие факты и теоремы относительно связи йонсоновских теорий и их компаньонов [10].

**Определение 15.** Пусть $T$ — йонсоновская теория. Компаньоном йонсоновской теории $T$ называется такая теория $T^\#$ той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(T^\#)_\forall = T_\forall$;

2) для любой йонсоновской теории $T'$, если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\# = (T')^\#$.

3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^\#$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^\#$ являются $T^*, T^0, T^f, T^M, T^e$, где $T^0$-компаньон есть оболочка Кайзера; $T^*$-компаньон есть центр; $T^M$-компаньон есть модельный компаньон; $T^f$-компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона; $T^e$-компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории $T$.

Таким образом, вышеуказанный вопрос А.Д.Тайманова можно переформулировать следующим образом:

(**) Какими свойствами должны обладать решетки $E_n$, $n \in \omega$, чтобы существовала йонсоновская теория $T$, такая что $E_n$ была изоморфна $E_n(T)$, $n \in \omega$?

Аналогично, мы будем говорить, что вопрос (**) решается положительно для йонсоновской теории $T$, если существует такая последовательность решеток $E_n$, $n \in \omega$, что $E_n$ изоморфна $E_n(T)$, $n \in \omega$.

В связи с этими вопросами (*), (**) сформулируем следующие результаты, доказательство которых следует из теоремы 3.3.

**Теорема 22.** Пусть $T$ — совершенная, полная для экзистенциальных предложений йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– положительное решение вопроса (**) относительно теории $T$;

– положительное решение вопроса (*) относительно теории $T^*$, где $T^*$ является центром теории $T$;

– положительное решение вопроса (**) относительно #-компаньона теории $T, \# \in \{*, 0, m, f, e\}$,

где 0-компаньон есть оболочка Кайзера; *-компаньон есть центр; $m$-компаньон есть модельный компаньон; $f$-компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона; $e$-компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории $T$.

**Теорема 23.** Пусть $T$ — совершенная, полная для экзистенциальных предложений йонсоновская теория, и теория $T_\forall$ является йонсоновской, где $T_\forall$ — множество универсальных предложений, выводимых из $T$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

– положительное решение вопроса (**) относительно теории $T_\forall$, где $T_\forall$ — множество универсальных предложений, выводимых из $T$;

– положительное решение вопроса (*) относительно теории $T^*$, где $T^*$ является центром теории $T$.

*О подобиях в йонсоновских теориях.* В этом разделе мы рассмотрим некоторые синтаксические свойства йонсоновских теорий.

Все неопределенные теоретико-модельные понятия, связанные с йонсоновостью, можно найти в [3]. Аналогично определению йонсоновости многие семантические теоретико-модельные понятия имеют свои синтаксические йонсоновские аналоги. Это говорится для того, чтобы в дальнейшем свободно использовать семантические определения. Т.Г.Мустафин в [5] определил точное понятие синтаксического и семантического подобия полных теорий. Причем на языке этих определений и соответствующих понятий (например, оболочка теории, семантическое свойство (теории, модели, элемента)), он доказал, что для произвольной полной теории существует синтаксически подобная ей некоторая теория полигонов. В классе йонсоновских теорий данный подход к классификации соответствующих объектов приемлем, но требует определенных изменений в определениях соответствующих подобий теорий. Это связано, во-первых, с тем, что, вообще говоря, йонсоновские теории не полны, и, во-вторых, что в классе моделей йонсоновской теории однородно-универсальные модели, вообще говоря, не насыщенны.

С помощью обобщения некоторых определений из [5] и техники работы с йонсоновскими теориями получено, что в классе совершенных $\exists$-полных йонсоновских теорий понятия введенных подобий йонсоновских теорий совпадают с соответствующими понятиями в [5]. Дадим следующие определения.

Пусть $T$ — произвольная йонсоновская теория, тогда $E(T) = \bigcup_{n<\infty} E_n(T)$, где $E_n(T)$ есть решетка $\exists$-формул с $n$ свободными переменными; $T^*$ — центр йонсоновской теории $T$, т.е. $T^* = Th(C)$, где $C$ — семантическая модель йонсоновской теории $T$ в смысле [2].

**Определение 16.** Пусть $T_1$ и $T_2$ — йонсоновские теории.

Мы будем говорить, что $T_1$ и $T_2$ — $J$-синтаксически подобны, если существует биекция $f: E(T_1) \to E(T_2)$ такая, что

1) ограничение $f$ до $E_n(T_1)$ есть изоморфизм решеток $E_n(T_1)$ и, $E_n(T_1)$ $n \in \omega$;

2) $f(\exists \nu_{n+1} \varphi) = \exists \varphi_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in E_{n+1}(T)$, $n \in \omega$;

3) $f(\nu_1 = \nu_2) = (\nu_1 = \nu_2)$.

**Определение 17.** Йонсоновская теория $T$ называется совершенной, если каждая семантическая модель $T$ является насыщенной моделью $T^*$.

Главным результатом данной работы является следующий результат, связанный с вышеуказанными определениями.

**Теорема 24.** Пусть $T_1$ и $T_2$ — $\exists$-полные совершенные йонсоновские теории.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $T_1$ и $T_2$ — *J*-синтаксически подобны;

2) $T_1^*$ и $T_2^*$ синтаксически подобны [5].

**Определение 18.**

1. Чистой тройкой назовем $\langle A, \Gamma, \mathrm{M}\rangle$, где $A$ не пусто; $\Gamma$ — группа перестановок, $A$ и $M$ — семейство подмножеств $A$, таких что $M \in \mathrm{M} \Rightarrow g(M) \in \mathrm{M}$ для каждого $g \in \Gamma$.

2. Если $\langle A_1, \Gamma_1, \mathrm{M}_1\rangle$ и $\langle A_2, \Gamma_2, \mathrm{M}_2\rangle$ — чистые тройки, и $\psi : A_1 \to A_2$ — биекция, то $\psi$ есть изоморфизм, если

(i) $\Gamma_2 = \{\psi g \psi^{-1} : g \in \Gamma_1\}$;

(ii) $\mathrm{M}_2 = \{\psi(E) : E \in \mathrm{M}_1\}$.

**Определение 19.** Чистая тройка $\langle |C|, G, \mathbb{N}\rangle$ называется семантической тройкой полной теории *T*, где $|C|$ — носитель монстр-модели *C* теории *T*; $G = Aut(C)$; $\mathbb{N}$ — класс всех подмножеств $|C|$, каждое из которых является носителем соответствующей элементарной подмодели *C*.

**Определение 20.** Полные теории $T_1$ и $T_2$ называются семантически подобными, если их семантические тройки изоморфны между собой.

Из [5] известен следующий результат.

**Предложение 1.** Если теории $T_1$ и $T_2$ синтаксически подобны, тогда $T_1$ и $T_2$ семантически подобны, обратное не верно.

Пусть *T* — йонсоновская теория, удовлетворяющая условию теоремы 1.

**Определение 21.** Чистая тройка $\langle C, Aut\ C, Sub\ C\rangle$ называется *J*-семантической тройкой, где *C* — семантическая модель *T*; *Aut C* — группа автоморфизмов *C*; *Sub C* — класс всех подмножеств носителя *C*, которые являются носителями соответствующих подмоделей *C*.

**Определение 22.** Две йонсоновские теории $T_1$ и $T_2$ называются *J*-семантически подобными, если их *J*-семантические тройки изоморфны как чистые тройки.

Корректность такого определения следует из того, что у совершенной йонсоновской теории семантическая модель единственна с точностью до изоморфизма. В противном случае все семантические модели лишь элементарно эквивалентны между собой.

Две йонсоновские теории косемантичны между собой, если они имеют одну семантическую модель.

В связи с этим можно сформулировать следующее:

**Лемма 1.** Любые две косемантические йонсоновские теории *J*-семантически подобны.

**Лемма 2.** Если две совершенные $\exists$-полные йонсоновские теории *J*-синтаксически подобны, то они *J*-семантически подобны.

*Заключение.* В связи с тем, что синтаксическое подобие теорий более сильное понятие, чем семантическое подобие теорий, а также семантическое подобие теорий сохраняет целый ряд полезных свойств, мы можем сделать следующие выводы:

1. Рассмотренный выше результат (теорема 24) о подобии в йонсоновском смысле позволяет перенести эти полезные факты о соответствующих центрах йонсоновских теорий на них самих.

2. Так как основным результатом [5] является подобие произвольной полной теории некоторой теории полигонов, то мы можем надеяться на аналогичный результат и с йонсоновскими теориями. В этом случае мы можем также говорить о некой универсальной интерпретации-полигонах. А это уже относится к вопросу о логической семантике естественного языка.

3. Переход к йонсоновским теориям даёт ещё одно преимущество в том смысле, что мы имеем дело в основном с формулами, у которых длина перемен кванторов не более двух, а семантический аспект ограничивается как правило классом экзистенциально-замкнутых моделей.

## References


1 *Pal'chunov D.E.* Modelling of thinking and formalization of thinking reflection: I. Model-theoretic formalization of the ontology and reflection // Philosophy of science. — № 4 (31). — 2006. — P. 86–114.

2 Handbook of mathematical logic. Jon Barwise.Elsevier, 01.01.1989: In 4 parts / Part 1.Model Theory from English. — M.: Nauka; Home Edition Physical and Mathematical Literature, 1982.

3 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson's theory. — Karaganda: KarSU Publ., 2009. — 250 p.

4 *Mustafin T.G.* On Boolean algebras of theories // Mathematics and physics research. — Karaganda: KarSU Publ., 1974. — Issue 1. — P. 80–84.

5 *Mustafin T.G.* On similarities of complete theories // Logic Colloquium'90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, held in Helsinki, Finland, July, 15–22. — 1990. — P. 259–265.

6 *Pal'chunov D.E.* Algebraische Beschreibung der Bedeutung von Äußerungen der natürlichen Sprache // In: Zelger, Josef/Maier, Martin (Hrsg.): GABEK. Verarbeitung und Darstellung von Wissen. — Innsbruck-Wien: Studien-Verlag (1999). — P. 310–326.

7 *Pal'chunov D.E.* On a logical analysis of GABEK. In: Buber, Renate/Zelger, Josef (Hrsg.): GABEK II. Zur Qualitativen Forschung On Qualitative Research. — Innsbruck-Wien-Munchen: Studien-Verlag (2000). — P. 185–203.

8 *Pal'chunov D.E.* The solution of the problem of finding information based on ontologies. Business Informatics. — № 1. — 2008. — P. 3–13.

9 *Pal'chunov D.E.* Modelling of thinking and formalization of thinking reflection. II: Ontologies and the formalization of the concepts // Philosophy of Science. — № 2 (37). — 2008. — With. 62–99.

10 *Pal'chunov D.E.* Sentences of Definability of Boolean algebras with distinguished ideals. Bulletin of the NSU. Ser.: Mathematics, mechanics, computer science. — № 2. — 2008. — Vol. 8. — C. 62–75.

11 *Pal'chunov D.E.* Search and retrieval of knowledge: the generation of new knowledge-based analysis of natural language texts // Philosophy of Science. — № 4 (43). — 2009. — With. 70–90.

12 *Pal'chunov D.E., Ulyanov E.A.* Methods for automatic generation of search heuristics. Bulletin of the NSU. Ser.: Information Technology. — 2010. — Vol. 8. — №. 3. — P. 5–12.

13 *Pal'chunov D.E., Yakhyaeva G.E.* Fuzzy algebraic systems. Bulletin of the NSU. Ser.: Mathematics, mechanics, computer science. — 2010. — T. 10 — № 3.— P. 75–92.

14 *Vlasov D.Yu., Pal 'chunov D.E., Stepanov P.A.* Automate extraction of relationships between concepts of natural language texts. Bulletin of the NSU. Ser.: Information Technology. — 2010. — Vol. 8. — № 3. — P. 23–33.

15 *Palchunov D.E.* Virtual catalog: the ontology-based technology for information retrieval // In: Knowledge Processing and Data Analysis. LNAI 6581. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. — P. 164–183.

16 *Yeshkeyev A.R.* Similarity of the theories of subject areas // Proceedings of Russian Conference with international participation KONT-09. — Novosibirsk, 2009. — P. 207–212.

17 *Yeshkeyev A.R.* Lattices of formulas of theory of subject areas: Proceedings of Russian Conference with international participation KONT-11. — Novosibirsk, 2011. — P. 113–122.


А.Р.Ешкеев, Д.Е.Пальчунов

## Заттық аймақтардағы аналитикалық йонсондық теориялардың кейбір синтаксистік және семантикалық қасиеттерінің формализациясы

Мақалада заттық аймақтардың кейбір толымсыз аналитикалық теориялардың модельді-теоретикалық қасиеттерін құру және зерттеу сұрақтарымен байланысты екі автордың нәтижелеріне шолу жасалған. Осы жұмыстың ең негізгі мақсаты [1–3]-жұмыстардағы басталған заттық аймақтардың логикалық формализацияның әрі қарай өңделуі болып табылады.

A.R.Eshkeev, D.E.Palchunov

## The formalization of some syntactic and semantic properties of analytical jonsson' theories of domains

This article provides an overview of the results of both authors connected with the question of the construction and study model-theoretic properties of certain incomplete analytical theories of subject areas. The main purpose of this note is to further develop the logical formalization of domain ontologies, which began in [1–3].