3.S. Feferman and R. Vaught, The _rst order properties of algebraic systems. Fundamenta Mathematicae 47, p. 57-103, 1959.
4.T. E. Frayne, A. C. Morel and D. S. Scott, Reduced direct products, Fundamenta Mathematicae, 51 (1962), 195-228.
5.F. Galvin, Horn sentences. Ann. Math. Logic, 1(1970), 389-422.
6.V. A. Gorbunov, Algebraic Theory of Quasivarieties, Plenum Publ. Co., New York (1998).
7.W. Hodges, Model Theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge: Cambridge University Press. (1993).
8.H. J. Keisler, Ultraproducts and elementary classes, Indagationes Mathematicae 23 (1961) 477-495.
9.M. Machover, A note on sentences preserved under direct products and powers, Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 8(1960), 519-523.
10.A. Macintyre, Direct powers with distinguished diagonal, Conference in Mathematical Logic London 1970
11.А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М. Наука (1970),с.392
12.D. Rees, On semigroups, Proc. Camb. Phil. Soc. 36(1940), 387-400.
13.S. Shelah, Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers, Israel Journal of Mathematics, 10 (1971), 224-233.
14.R. Vaught, On sentences holding in direct products of relational system, Proc. Intern. Congr. of Mathematicians, Amsterdam, (1954), Noordho_, Groningen, 409.
15.J. M. Weinstein, First order properties preserved by direct product, Ph.D. thesis. Univ. Wisconsin (1965), Madison,
16.J. Wierzejewski, On stability and products, Fundamenta Mathematicae, 93(1976), 81-95.
17.М. И. Бекенов, Решетка формульно-определимых подквазимногообразий полных теорий квазимногообразия полных теорий. Мальцевские чтения.Новосибирск.2018.

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА A_2 И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ибраев Ш.Ш., Сейтмуратов А.Ж.
Кызылординский университет имени КоркытАта, Кызылордаа, Казахстан
E-mail: ibrayevsh@mail.ru, angisin_@mail.ru

В докладе рассматриваются результаты, полученные при исследований когомологии алгебры Ли типа A_2 над полем характеристики $p > 3$с коэффициентами в простых модулях, и их некоторые приложения. Для малых характеристик поля ($p = 2,3$) аналогичные результаты докладывались в [1].

Пусть $\mathfrak{g}$ – классическая алгебра Ли типа A_2 над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 3, M$ – простой -модуль. Когомологии с коэффициентами в простых $\mathfrak{g}$-модулей ранее были вычислены только в случаях $H^1(\mathfrak{g}, M)$ [2]и$H^2(\mathfrak{g}, M)$ [3]. В общем случае справедлива следующая

Теорема 1. $\mathfrak{g}$ – *классическая алгебра Ли типа A_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3, M$ – простой -модуль. Тогда имеют место следующие изоморфизмы SL_3-модулей:*

(a) $H^n(\mathfrak{g}, k) \cong k$, если $n = 0,3,5,8$;

(b) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(p-2,1)\big) \cong \begin{cases} L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 1,7, \\ 2L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(c) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(1,p-2)\big) \cong \begin{cases} L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 1,7, \\ 2L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(d) $H^n(\mathfrak{g}, L(p-3,0)) \cong L(1,0)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(e) $H^n(\mathfrak{g}, L(0,p-3)) \cong L(0,1)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(f) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(p-2,p-2)\big) \cong \begin{cases} k, \text{если } n = 1,7, \\ L(1,1)^{(1)}, \text{если } n = 3,5 \\ 2L(1,1)^{(1)} \oplus 2k, \text{если } n = 4. \end{cases}$

Во всех остальных случаях$H^n(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Рассмотрим некоторые приложения Теоремы 1. Она позволяет описать когомологию алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$ над алгебраически замкнутым полем kхарактеристики $p > 3$с коэффициентами в простых модулях. Простого $\mathfrak{g}$-модуля Mможно наделит структурой $\mathfrak{gl}_3$-

модуля с нулевым действием на M центра алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$. Для когомологии простых $\mathfrak{gl}_3$-модулей справедлива следующее

Следствие 1. $\mathfrak{g}$ – *алгебра Ли* $\mathfrak{gl}_3$*над алгебраически замкнутым полем* k *характеристики*$p > 3, M$ *– простой* $\mathfrak{g}$*-модульс нулевым действием на* M *центра алгебры Ли*$\mathfrak{gl}_3$*. Тогда имеют место следующие изоморфизмы* SL_3*-модулей:*

(a) $H^n(\mathfrak{g}, k) \cong k$, если $n = 0,1,3,4,5,6,8,9$;

(b) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(p-2,1)\big) \cong \begin{cases} L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 1,2,7,8, \\ 2L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 4,5; \end{cases}$

(c) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(1,p-2)\big) \cong \begin{cases} L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 1,2,7,8, \\ 2L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 4,5; \end{cases}$

(d) $H^n(\mathfrak{g}, L(p-3,0)) \cong \begin{cases} L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 2,4,5,7, \\ 2L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 3,6; \end{cases}$

(e) $H^n(\mathfrak{g}, L(0,p-3)) \cong \begin{cases} L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 2,4,5,7, \\ 2L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 3,6; \end{cases}$

(f) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(p-2,p-2)\big) \cong \begin{cases} k, \text{если } n = 1,2,7,8, \\ L(1,1)^{(1)}, \text{если } n = 3,6, \\ 3L(1,1)^{(1)} \oplus 2k, \text{если } n = 4,5. \end{cases}$

Во всех остальных случаях$H^n(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Теорема 1 также позволяет вычислить когомологии модулей Вейля над классической алгеброй Ли типа A_2над полем характеристики $p > 3$ и дуальных к ним модулей. Обозначим модуль Вейля со старшим весом λчерез$V(\lambda)$.Для дуального модуля будем использовать стандартное обозначение $H^0(\lambda)$.

Следствие 2. $\mathfrak{g}$ – *классическая алгебра Ли типа* A_2 *над алгебраически замкнутым полем* k *характеристики* $p > 3$*и*$V = V(\lambda)$*. Тогда имеют место следующие изоморфизмы* SL_3*-модулей:*

(a) $H^n(\mathfrak{g}, V(0,0)) \cong k$, если $n = 0,3,5,8$;

(b) $H^n\big(\mathfrak{g}, V(p-2,1)\big) \cong \begin{cases} L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 1,2,3,5,6,7, \\ 2L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(c) $H^n\big(\mathfrak{g}, V(1,p-2)\big) \cong \begin{cases} L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 1,2,3,5,6,7, \\ 2L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(d) $H^n(\mathfrak{g}, V(p-3,0)) \cong L(1,0)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(e) $H^n(\mathfrak{g}, V(0,p-3)) \cong L(0,1)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(f) $H^n\big(\mathfrak{g}, V(p-2,p-2)\big) \cong \begin{cases} k, \text{если } n = 0,1, \\ L(1,1)^{(1)} \oplus k, \text{если } n = 3, \\ 2L(1,1)^{(1)} \oplus k, \text{если } n = 4, \\ L(1,1)^{(1)}, \text{если } n = 5. \end{cases}$

Во всех остальных случаях$H^n(\mathfrak{g}, V) = 0$.

Следствие 3. $\mathfrak{g}$ – *классическая алгебра Ли типа* A_2 *над алгебраически замкнутым полем* k *характеристики* $p > 3$*и*$V = H^0(\lambda)$*. Тогда имеют место следующие изоморфизмы* SL_3*-модулей:*

(a) $H^n(\mathfrak{g}, H^0(0,0)) \cong k$, если $n = 0,3,5,8$;

(b) $H^n\big(\mathfrak{g}, H^0(p-2,1)\big) \cong \begin{cases} L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 1,2,3,5,6,7, \\ 2L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(c) $H^n\big(\mathfrak{g}, H^0(1,p-2)\big) \cong \begin{cases} L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 1,2,3,5,6,7, \\ 2L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(d) $H^n(\mathfrak{g}, H^0(p-3,0)) \cong L(1,0)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(e) $H^n(\mathfrak{g}, H^0(0,p-3)) \cong L(0,1)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(f) $H^n\big(\mathfrak{g}, H^0(p-2,p-2)\big) \cong \begin{cases} L(1,1)^{(1)}, \text{если } n=3, \\ 2L(1,1)^{(1)} \oplus k, \text{если } n=4, \\ L(1,1)^{(1)} \oplus k, \text{если } n=5, \\ k, \text{если } n=7,8. \end{cases}$

Во всех остальных случаях $H^n(\mathfrak{g}, V) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта AP08855935 МОН РК.

Список использованной литературы

1. Ибраев Ш.Ш., Турбаев Б.Е., Ибраева А.А. Когомологии алгебры Ли типа A_2 в малых характеристиках // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики», МГУ имени Ломоносова, Казахстанский филиал, Библиотека Первого президента РК – Елбасы, 4 июня 2021 года, г. Нур-Султан. – С. 24 – 26.

2. Jantzen J.C., First cohomology groups for classical Lie algebras, in Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras (Bielefeld, 1991), Progr. Math., Vol. 95, Birkhäuser, Basel, 1991, 289–315.

3. Dzhumadil'daev A.S., IbraevSh.Sh., Nonsplit extensions of modular Lie algebras of rank 2, Homology Homotopy Appl.4 (2002), 141–163.

КЕЛЛЕР КӨПМҮШЕЛЕРІНІҢ АЛГЕБРАЛЫҚ КӨПБЕЙНЕСІ

Керімбаев Р.Қ.

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы,Қазақстан

E-mail: ker_im@mail.ru

1. $\mathbb{R}$ − нақты сандар өрісі, $\mathbb{R}[x,y]$ − екі айнымалы көпмүшелер сақинасы. $f,g \in \mathbb{R}[x,y]$ Келлер көпмүшелеріне келесі қосымша шарттарды қоямыз:

$$f(0,0) = 0 = g(0,0) \text{ және } f(a,b) = 0 = g(a,b), \tag{1}$$

мұндағы $a,b \in \mathbb{R}$ және $b \neq 0$ деп аламыз.

f,g Келлер көпмүшелерінің графигі $\mathbb{R}^4$ кеңістігінде жатады. Ол графикті π деп белгілейміз:

$$\pi = \{(x,y,f(x,y),g(x,y)) | x,y \in \mathbb{R},\ \ f,g \in \mathbb{R}[x,y]\}. \tag{2}$$

(1) шарты бойынша $O(0,0,0,0)$ және $A(a,b,0,0)$ нүктелері π графигіне тиісті. $t \in \mathbb{R}$ санын бекітіп алып $B\big(at,bt,f(at,bt),g(at,bt)\big) \in \pi$ нүктесін қарастырамыз. Сонымен бірге келесі үш векторды аламыз:

$$e_1 = (1,0,0,0), \overrightarrow{OA} = (a,b,0,0), \overrightarrow{OB} = \big(at,bt,f(at,bt),g(at,bt)\big).$$

Бастапқы $O(0,0,0,0)$ нүктесі және бағыттаушы $e_1, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ векторлары бойынша Π гипержазықтығын жүргіземіз. Енді Π мен π беттерінің параметрлік теңдеулерін аламыз.

$$\Pi: \begin{cases} X = \alpha + \beta a + \gamma at, \\ Y = \beta b + \gamma bt, \\ U = \gamma f(at,bt), \\ V = \gamma g(at,bt), \end{cases} \quad \pi: \begin{cases} x = r, \\ y = s, \\ u = f(r,s), \\ v = g(r,s), \end{cases}$$

мұндағы $\alpha,\beta,\gamma,r,s \in \mathbb{R}$ − кез келген параметрлер. $l = \Pi \cap \pi$ қиылысуын табу керек. $A,B,O \in l$ екені белгілі. Ол үшін сәйкес координаталарды теңестіреміз: