

Синтез шарнирного четырехзвенника по заданной шатунной кривой

В статье рассмотрен синтез плоского четырехзвенного рычажного механизма методами оптимизации с применением компьютерной техники. Предложен алгоритм оптимизации кинематических параметров шарнирного четырехзвенника по заданным его свойствам. Задача многомерной оптимизации сведена к методу наименьших квадратов. Разработанная программа вычислений позволила получить оптимальные выходные параметры синтеза четырехзвенника по заданной шатунной кривой в виде наклонного эллипса при минимальном значении целевой функции.

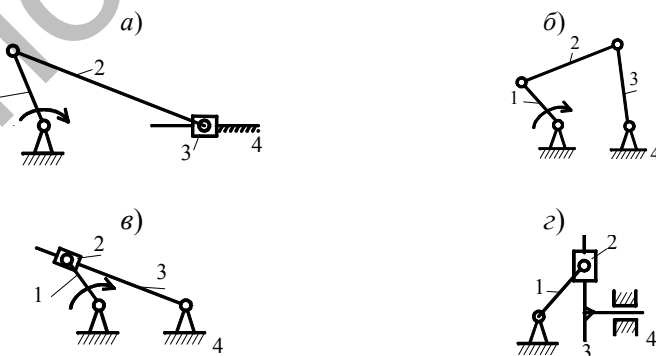
Ключевые слова: шарнирный четырехзвенник, шатунная кривая, эллипс, многомерная оптимизация, метод наименьших квадратов, алгоритм, выходные параметры синтеза.

Ведущей отраслью современной техники является машиностроение. Прогресс машиностроения в свою очередь определяется созданием новых высокопроизводительных и надежных машин и механизмов. Решение этой важнейшей проблемы основывается на комплексном использовании результатов многих научных дисциплин, и, в первую очередь, теории механизмов и машин. Качество создаваемых машин и механизмов и точность операций, выполняемых современным технологическим оборудованием, в значительной мере определяются полнотой разработки и использования методов синтеза. Поэтому синтез и проектирование механизмов, наилучшим образом удовлетворяющих этим требованиям, являются важной задачей и имеют актуальное значение. Понятие оптимального решения подразумевает выбор такого варианта конструкции, который бы обладал возможно большими достоинствами при сведённых к минимуму недостатках.

Под оптимизацией в синтезе механизмов понимают определение выходных (искомых) параметров синтеза из условия минимума целевой функции при выполнении принятых ограничений. При большом числе параметров оптимизация производится с помощью компьютерной техники и сводится к методам поиска комбинации параметров синтеза.

Значительное место среди различных механизмов занимают плоские рычажные механизмы с низшими кинематическими парами. Они обладают рядом достоинств, таких как способность передавать большие силы, разнообразие движений выходного звена, высокая надежность, простота изготовления, сравнительно низкая стоимость и др. Рычажные механизмы применяются в станкостроении, приборостроении, компрессорах, насосах, а также в сельхозмашинах, машинах легкой промышленности и др.

Среди существующих рычажных механизмов наибольшее распространение получили так называемые четырехзвенные, схемы которых представлены на рисунке 1 [1].



а — кривошипно-ползунный механизм, *б* — четырехшарнирный механизм,
в — кулисный механизм, *г* — синусный механизм

Рисунок 1. Плоские четырехзвенные рычажные механизмы

Среди показанных выше четырехзвенных рычажных механизмов наибольший интерес представляет четырехшарнирный механизм, так как широчайшая гамма конструкций механизмов в различных отраслях современной промышленности и бытовой техники основана на применении рычажных шарнирных четырехзвенников, реализующих разнообразные технологические и кинематические задачи в машинах и агрегатах. Четырехзвенные шарнирные механизмы широко применяются для преобразования равномерного вращательного движения в неравномерное вращательное, качательное или в сложное плоское движение. Например, четырехзвенные шарнирные механизмы дают возможность получать сложное плоско-параллельное движение шатунов (плоских систем), которое используется для выполнения технологических операций в механизмах тестомесилки, грохота, сеноворошилки и т.д. Поэтому их рациональное проектирование с достижением оптимальных значений критериальных функций является весьма прагматичной и часто исследуемой конструкторской задачей [2–4].

Шарнирные четырехзвенные механизмы обладают уникальными свойствами и подбором длин рычагов и их исходного положения обеспечивают:

- воспроизведение заданных траекторий и закона движения;
- заданную скорость исполнительного звена в определенном (заданном) положении;
- широкий диапазон кинематических и динамических характеристик рычажного механизма и ряд других существенно значимых функций.

Задача о построении механизма, который сможет удовлетворить всем наперед заданным условиям, издавна и по сей день интересует механиков. В сущности, она является одной из главнейших, если не самой главной, в кинематике механизмов. Проектирование любого механизма начинается с проектирования его схемы и определения постоянных параметров выбранной схемы механизма по заданным его свойствам.

В предлагаемой работе ставится задача синтеза шарнирного четырехзвенного рычажного механизма, удовлетворяющего условию существования кривошипа, по заданной шатунной кривой при наложенных ограничениях на длины звеньев. Как известно, из курса теории механизмов и машин, чтобы в шарнирном четырехзвеннике, у которого стороны удовлетворяют условию $a < b < c < d$, звено a было кривошипом, необходимо, чтобы сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев была меньше или равна сумме длин двух других звеньев, т.е. должно соблюдаться следующее ограничение $(a + d) \leq (b + c)$. Поставленная задача сводится к методу наименьших квадратов многомерной оптимизации при заданных ограничениях. Предлагается в качестве проектных параметров оптимизации выбрать размеры звеньев механизма (a, b, c, f) при определенном значении расстояния между опорами d , а выбор оптимального решения проводить с помощью целевой функции, определяемой проектными параметрами, чтобы сумма квадратов отклонений шатунной кривой точки M от заданной кривой (эллипса) была наименьшей.

Тогда глобальный критерий оптимальности (основное условие) можно записать в виде следующей целевой функции:

$$\sigma = \sum (r_2 - r_1)^2, \quad (1)$$

где r_2 — радиус (от центра фигуры) шатунной кривой в точке M ; r_1 — радиус заданного эллипса в соответствующей точке.

Кинематические параметры четырехзвенного шарнирного механизма будем находить из условия минимума функции. Применение такого метода оптимизации позволяет выбрать оптимальные значения выходных параметров и достичь наилучшего варианта конструкции механизма, если отклонения подчиняются нормальному закону распределения.

Дополнительные условия синтеза при решении задач синтеза механизмов также должны быть представлены в математической форме. Эти условия выражаются обычно неравенствами, устанавливающими допустимые области существования параметров синтеза (в нашем случае $a < b < c < d$ и $(a + d) \leq (b + c)$). Поэтому целевая функция вычисляется только для тех комбинаций параметров синтеза, которые удовлетворяют дополнительным условиям синтеза.

Как видно из рисунков 2 и 3, заданное кинематическое свойство механизма состоит в том, что точка M на шатуне шарнирного четырехзвенного механизма должна описывать траекторию, мало отличающуюся от заданной кривой — наклонного эллипса при произвольных координатах его центра (заданы большая полуось a_1 и малая полуось b_1 , угол наклона большой оси φ_1).

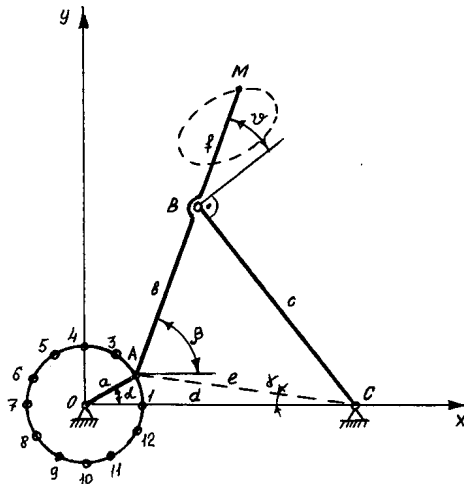


Рисунок 2. Схема плоского четырехзвенного шарнирного механизма

Выразить целевую функцию (1) в явном виде через параметры синтеза невозможно, но можно указать алгоритм ее вычисления, т.е. последовательность, в которой надо производить вычисления, чтобы получить σ для данной комбинации параметров синтеза.

Из ΔOAC находим диагональ AC шарнирного четырехзвенного механизма:

$$e = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha}. \quad (2)$$

Угол наклона этой диагонали равен

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{a}{e} \sin \alpha\right). \quad (3)$$

Из ΔABC находим угол ϑ , т.е. угол давления на коромысло BC со стороны шатуна AB , если считать, что сила, действующая на коромысло, направлена по оси шатуна:

$$\vartheta = \arcsin \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc}. \quad (4)$$

Угол наклона шатуна AB к стойке равен

$$\beta = \arcsin\left(\frac{c}{e} \cos \vartheta\right) - \gamma. \quad (5)$$

Из уравнений проекции контура $OABM$ на координатные оси находим искомые координаты точки M :

$$X_M = a \cos \alpha + b \cos \beta + f \cos \beta = a \cos \alpha + (b + f) \cos \beta; \quad (6)$$

$$Y_M = a \sin \alpha + b \sin \beta + f \sin \beta = a \sin \alpha + (b + f) \sin \beta.$$

Для определения указанных координат можно использовать матричную форму записи, но она не упрощает задачу синтеза. При синтезе плоских механизмов, которые имеют в своем составе только двухповодковые группы, применение матричных методов нельзя считать удачным, так как матрицы дают лишь простую форму записи необходимых вычислений, но не определяют содержания метода. Так, для нашего примера матричная форма записи имеет следующий вид:

$$T = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_M = \begin{vmatrix} a \\ b + f \end{vmatrix}. \quad (7)$$

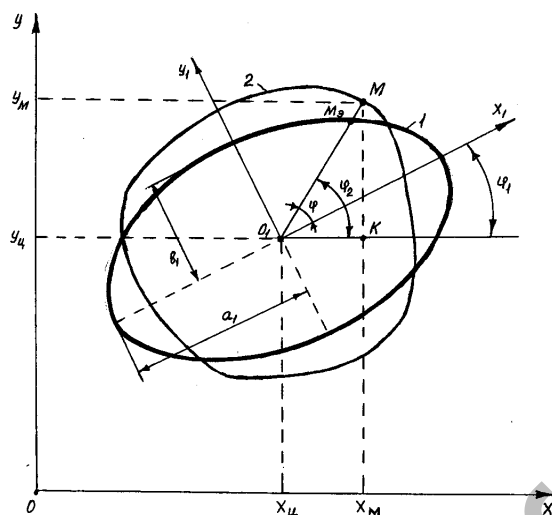
Умножая квадратную матрицу T на столбцевую матрицу \bar{r}_M , получим:

$$X_M = a \cos \alpha + (b + f) \cos \beta;$$

$$Y_M = a \sin \alpha + (b + f) \sin \beta.$$

Как видно из вычисления, запись в матричной форме не вносит каких-либо упрощений. Поэтому синтез сводится к вычислениям по достаточно простым формулам, которые могут быть получены на основании рассмотрения некоторых треугольников.

За один оборот кривошипа угол α меняется от 0 до 2π . Разбиваем траекторию точки A на n равных частей, отсюда следует, что значение угла α будет меняться через каждые $\Delta\alpha$ (рис. 2).



1 — заданная траектория (эллипс) точки M на шатуне; 2 — траектория точки M на шатуне при произвольно выбранных выходных параметрах синтеза

Рисунок 3. К расчету оптимальных выходных параметров синтеза

Тогда координаты центра плоской фигуры (шатунной кривой или эллипса), описываемой точкой M , равны

$$X_{MЦ} = \frac{\sum X_M}{n}, Y_{MЦ} = \frac{\sum Y_M}{n}. \tag{8}$$

После вычисления координат $X_M, Y_M, X_{MЦ}$ и $Y_{MЦ}$ шатунной кривой из ΔO_1MK находим расстояние от центра эллипса O_1 до точки M шатуна:

$$O_1M = \sqrt{(X_{MЦ} - X_M)^2 + (Y_{MЦ} - Y_M)^2}. \tag{9}$$

Угол наклона радиуса O_1M к стойке равен

$$\varphi_2 = \arctg \left(\frac{Y_{MЦ} - Y_M}{X_{MЦ} - X_M} \right). \tag{10}$$

Тогда угол наклона радиуса O_1M к большой оси эллипса равен

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \tag{11}$$

Расстояние от центра O_1 до соответствующей точки M_φ эллипса (радиус эллипса в данной точке) вычисляется по известной формуле:

$$O_1M_\varphi = \frac{a_1 b_1}{\sqrt{b_1^2 \cos^2 \varphi + a_1^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{12}$$

где a_1 — большая полуось эллипса; b_1 — малая полуось эллипса.

После вычисления расстояний O_1M и O_1M_φ находим наиболее оптимальные искомые (выходные) параметры синтеза плоского шарнирного четырехзвенного механизма по методу наименьших квадратов (формула 1), который основан на минимизации суммы квадратов невязок:

$$\sigma = \sum (O_1M - O_1M_\varphi)^2. \tag{13}$$

Блок-схема данного алгоритма представлена на рисунке 4.

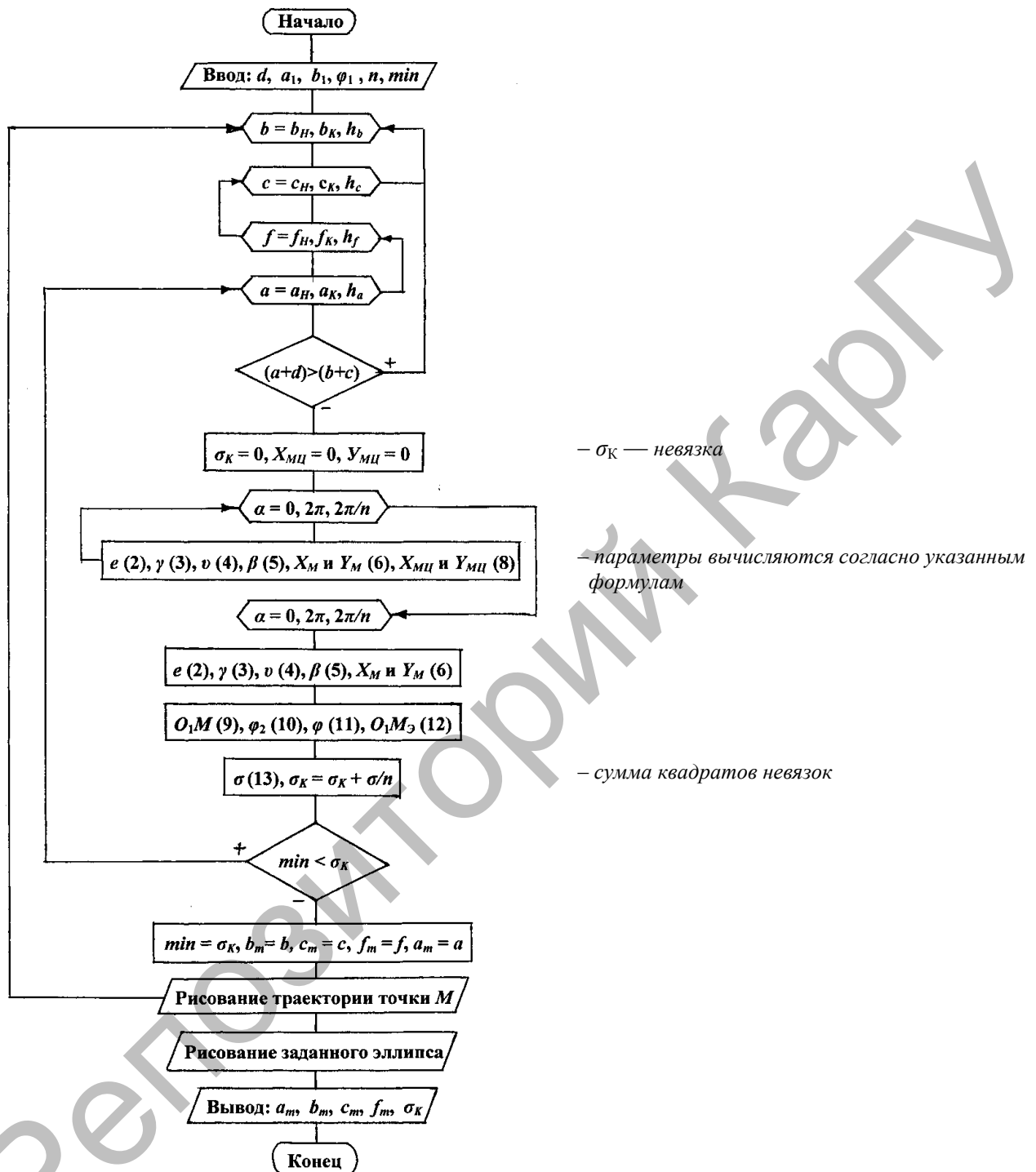


Рисунок 4. Блок-схема алгоритма оптимизации выходных параметров механизма

Согласно представленной блок-схеме на алгоритмическом языке разработана программа расчета, реализованная на ПК. Оптимальные результаты расчета для механизма при $d = 1,2$ м, $a_1 = 0,2$ м, $b_1 = 0,12$ м приведены в таблице.

Проектные параметры четырехзвенного шарнирного механизма

Угол наклона заданного эллипса	Выходные кинематические параметры, м				Отклонение, м
	a	b	c	f	σ_{\min}
	0,18	0,7999	1,0899	0,4699	$1,02 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\pi}{4}$	0,19	0,7499	1,0099	0,4499	$4,9 \cdot 10^{-4}$
$\frac{\pi}{3}$	0,19	0,7999	0,8899	0,4299	$1,17 \cdot 10^{-3}$

Разработанный алгоритм пригоден для оптимизации плоских шарнирных четырехзвенных механизмов при воспроизводстве траекторий в виде наклонного эллипса любого размера. При решении конкретных технических задач в данный алгоритм можно включить и другие дополнительные ограничения в зависимости от поставленной задачи.

Список литературы

- 1 *Артобольский И.И.* Теория механизмов и машин. — М.: ИД «Альянс», 2012. — С. 640.
- 2 *Левитская О.Н., Левитский Н.И.* Курс теории механизмов и машин. — М.: Высш. шк., 1978. — С. 269.
- 3 *Турчак Л.И.* Основы численных методов. — М.: Наука, 1987. — С. 320.
- 4 *Поллак Э.* Численные методы оптимизации: Пер. с англ. / Под ред. И.А. Вателя. — М.: Мир, 1974. — С. 376.

А.К.Бейсебаев, Н.К.Бейсенов

Топсалы төртзвенолықты берілген шатун қисығы бойынша синтездеу

Мақалада жазық төртзвенолы рычагты механизмді компьютерлік техниканы қолдана отырып, оңтайландыру әдістерімен синтездеу қарастырылған. Берілген қасиеттері бойынша шарнирлі төртзвенолы механизмнің кинематикалық параметрлерін оңтайландыру алгоритмі ұсынылған. Көп өлшемді оңтайландыру есебін шешу ең кіші квадраттар әдісіне келтірілген. Есептеудің құрастырылған бағдарламасы көлбеу эллипс түрінде берілген шатун қисығы бойынша мақсаттық функцияның минимал мәнінде төртзвенолық синтезінің оңтайландырылған шығыс параметрлерін алуға мүмкіндік берді.

А.К.Бейсебаев, Н.К.Бейсенов

Synthesis of the hinged quadrilateral on the set crank curve

The article describes the synthesis of a flat four-unit lever mechanism by the way of optimization using computer technologies. An algorithm of optimization of kinematic parameters of the hinged quadrilateral mechanism set on its properties is requested. The problem of multidimensional optimization is reduced to the least square method. The developed calculation program has allowed to get the optimal output parameters of the synthesis of a flat four-unit mechanism on the set crank curve in the form of an inclined ellipse at the minimal value of the criterion function.

References

- 1 *Artobolevskiy I.I.* *The theory of machines and mechanisms*, Moscow: ID «Alliance», 2012, 640 p.
- 2 *Levitskaya O.N., Levitskiy N.I.* *Machines and mechanism theory course*, Moscow: Vysshaya shkola, 1978, 267 p.
- 3 *Turchak L.I.* *The basis of numerical methods*, Moscow: Nauka, 1987, 320 p.
- 4 *Polak E.* *The numerical techniques of optimization* / Transl. to Engl. edited by I.A. Vatel, Moscow: Mir, 1974, 376 p.