УДК 517.9

Н.А.Абиев, Ж.С.Шонтаева

Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати (E-mail: abievn@mail.ru)

Существование и единственность периодического решения системы нелинейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений

Изучены вопросы существования и единственности периодического решения системы сингулярно-возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Такие уравнения эквивалентно преобразуются в интегральные уравнения. Цель исследования состоит в доказательстве существования и единственности периодического решения и нахождении его асимптотики относительно малого параметра. В статье получены ответы на поставленные выше вопросы.

Ключевые слова: периодическое решение, сингулярное возмущение, интегро-дифференциальное уравнение, асимптотическое разложение периодического решения.

Всюду в дальнейшем периодическими будем называть функции, периодические по аргументам $t,\ x$ с одним и тем же периодом $T>0$, где $(t,x)\in\Omega=[0,T]\times(-\infty,+\infty)$.

Рассмотрим следующую систему сингулярно-возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\varepsilon(u_t(t,x)+u_x(t,x))=Du(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)u(s,x)ds+f(t,x)+\varepsilon g(t,x,u(t,x)), \qquad (1)$$

где $\epsilon\neq 0,\ \lambda\neq 0$ — вещественные числа; ε — малый положительный параметр; периодическая матричная функция $K(t,s)=\left\{k_{ij}\left(t,s\right)\right\}_{i,j=1,\dots,n}$ непрерывна по обоим аргументам на квадрате $[0,T]^2$; периодические вектор-функции $f(t,x)=\left\{f_i\left(t,x\right)\right\}_{i=1,\dots,n}$ и $g(t,x,u)=\left\{g_i\left(t,x,u\right)\right\}_{i=1,\dots,n}$ непрерывны по переменной t и непрерывно дифференцируемы по переменной x, более того, $g(t,x,u)$ непрерывно дифференцируема также по u; D — постоянная матрица, имеющая попарно различные характеристические числа $p_1,p_2,\dots,p_n$ с отличными от нуля вещественными частями $\mathrm{Re}(p_1),\mathrm{Re}(p_2),\dots,\mathrm{Re}(p_n)$.

Кроме того, все известные функции предполагаются ограниченными по переменной x. Тогда для векторных и матричных функций норму можно определить формулами

$$\|f\|=\max_{1\le i\le n}\max_{0\le t\le T}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|f_i\left(t,x\right)\right|,\quad \|K\|=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\max_{0\le t,s\le T}\left|k_{ij}\left(t,s\right)\right|.$$

Функция $g(t,x,u)$ должна удовлетворять условию Липшица:

$$\left\|g\left(t,x,u_2\right)-g\left(t,x,u_1\right)\right\|\le L\left\|u_2-u_1\right\|,\quad L=const>0.$$

История возникновения системы (1) восходит к работе [1], где, в частности, были изучены системы сингулярно-возмущенных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon u'(t)=Du(t)+\lambda\int_0^T K(t,s)u(s)ds+f(t)+\varepsilon g(t,u(t))$$

и были получены основополагающие результаты относительно вопросов существования, единственности и асимптотического разложения периодических решений таких систем.

Следующим естественным шагом является исследование подобных систем в частных производных, т.е. когда неизвестная функция зависит от двух переменных: $u = u(t,x)$.

В работе [2] было начато изучение систем вида (1) с использованием и обобщением методики, предложенной Дж. Хейлем [3]. Далее, используя представления Флоке, в работе [4] система (1) изучалась при переменной матрице $D(t)$. При этом следует отметить, что в этих работах теоремы существования и единственности решения были доказаны при очень строгих ограничениях к известным данным.

В работе [5] изучался случай, когда система (1) состоит из одного уравнения (т.е. D — вещественное число).

Используя подход, предложенный в [1], в настоящей работе мы обобщаем результаты [5] на случай систем вида (1) с постоянной матрицей D.

Пусть $\sum_{k=1}^{n} V_k e^{p_k t}$ — фундаментальная матрица решений системы с малым параметром

$$\varepsilon z'(t) = Dz(t),$$

где V_k — постоянные матрицы размера $n\times n$. Ясно, что $V_k p_k = DV_k$ и $\sum_{k=1}^{n} V_k = E_n$ — единичная матрица. Удобно ввести обозначение

$$q(t,x,u,\varepsilon) := \lambda\int_0^T K(t,s)u(s,x)ds + f(t,x) + \varepsilon g(t,x,u).$$

Тогда ясно, что система (1) принимает следующий общий и компактный вид нелинейной системы без явного указания интегрального члена:

$$\varepsilon(u_t + u_x) = Du + q(t,x,u,\varepsilon).$$

Лемма 1. В классе периодических функций система интегро-дифференциальных уравнений (1) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\left\{e^{-p_k T/\varepsilon} - 1\right\}} \int_t^{t+T} e^{p_k(t-s)/\varepsilon} q(s, x-t+s, u(s,x-t+s),\varepsilon)ds. \tag{2}$$

Доказательство. Так как

$$u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\left\{e^{-p_k T/\varepsilon} - 1\right\}}\Big[e^{p_k(t-t-T)/\varepsilon} q(t+T, x+T, u(t+T,x+T),\varepsilon) -$$
$$- e^{p_k(t-t)/\varepsilon} q(t,x,u(t,x),\varepsilon)\Big] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k p_k}{\varepsilon^2\left\{e^{-p_k T/\varepsilon} - 1\right\}} \int_t^{t+T} e^{p_k(t-s)/\varepsilon} q(s,x-t+s,u(s,x-t+s),\varepsilon)ds -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\left\{e^{-p_k T/\varepsilon} - 1\right\}} \int_t^{t+T} e^{p_k(t-s)/\varepsilon}\left[q_x + q_u u_x\right]ds$$

и

$$u_x(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\left\{e^{-p_k T/\varepsilon} - 1\right\}} \int_t^{t+T} e^{p_k(t-s)/\varepsilon}\left[q_x + q_u u_x\right]ds,$$

то справедливость леммы не вызывает сомнений.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если решение системы интегральных уравнений (2) существует, то оно представляет собой периодическую вектор-функцию.

Доказательство. Как показывает непосредственная проверка,

$$u(t+T,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\{\exp(-p_k T/\varepsilon) - 1\}} \int_{t+T}^{t+2T} \exp(p_k(t+T-s)/\varepsilon)\times$$
$$\times q(s, x-t-T+s, u(s,x-t-T+s),\varepsilon)ds =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\{\exp(-p_k T/\varepsilon) - 1\}} \int_t^{t+T} \exp(p_k(t-\mu)/\varepsilon) q(\mu, x-t+\mu, u(\mu,x-t+\mu),\varepsilon)d\mu = u(t,x),$$

где $\mu = s - T$ представляет собой новую переменную интегрирования. Аналогично

$$u(t,x+T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\{\exp(-p_k T/\varepsilon)-1\}} \int_t^{t+T} \exp(p_k(t-s)/\varepsilon)\times$$
$$\times q(s,x+T-t+s,u(s,x+T-t+s),\varepsilon)ds = u(t,x).$$

Лемма 2 доказана.

Приводим обобщение одного важного неравенства для норм, использованного ранее в работе [5] в одномерном случае.

Лемма 3. Для любой вектор-функции $H(t,x,u)$ из рассматриваемого класса функций и вещественного числа $a \neq 0$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon\left\{e^{aT/\varepsilon}-1\right\}} \int_t^{t+T} e^{-a(t-s)/\varepsilon} H(s,x-t+s,u)ds \right\| \le \frac{\|H\|}{|a|}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon\left\{e^{aT/\varepsilon}-1\right\}} \int_t^{t+T} e^{-a(t-s)/\varepsilon} H(s,x-t+s,u)ds \right\| \le \frac{\|H\|}{\varepsilon\left|e^{aT/\varepsilon}-1\right|} \int_t^{t+T} e^{-a(t-s)/\varepsilon} ds =$$

$$= \|H\| \frac{e^{aT/\varepsilon}-1}{a\left|e^{aT/\varepsilon}-1\right|} = \|H\| \frac{sign\left(e^{aT/\varepsilon}-1\right)}{a} = \frac{\|H\|}{|a|},$$

поскольку $sign\left(e^{aT/\varepsilon}-1\right) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a>0; \\ -1, & \text{если} \quad a<0. \end{cases}$

Лемма 3 доказана.

Введем теперь новые обозначения:

$$W(t,s,\varepsilon) := \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{\varepsilon\left\{e^{-p_k T/\varepsilon}-1\right\}} e^{p_k(t-s)/\varepsilon};$$

$$F(t,x,u,\varepsilon) := \int_t^{t+T} W(t,s,\varepsilon)[f(s,x-t+s)+\varepsilon g(s,x-t+s,u)]ds.$$

Зададим интегральный оператор I по правилу

$$I: v \mapsto \lambda \int_t^{t+T} W(t,s,\varepsilon) \int_0^T K(s,\gamma) v(\gamma,x-t+s,\varepsilon) d\gamma ds.$$

Тогда система интегральных уравнений (2) перепишется в виде $u = Iu + F$.

Лемма 4. Пусть $v(t,x,\varepsilon)$ — произвольная непрерывная и ограниченная функция в области $\Delta = \{(t,x,\varepsilon): \ (t,x)\in\Omega, \ \varepsilon>0\}$. Пусть $v(t,x,\varepsilon)$ ограничена при $\varepsilon\to 0$. Тогда интегральный оператор I функцию v отображает в функцию Iv, также непрерывную и ограниченную в области Δ. Причем Iv также ограничена при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Нетрудно установить непрерывность и ограниченность функции $F(t,x,0,\varepsilon)$ по аргументам $(t,x)\in\Omega$. Эта функция непрерывна также по ε при $\varepsilon>0$.

Несложно показать ограниченность функции $F(t,x,0,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. Действительно, с учетом очевидных неравенств $\left|e^w\right| = e^{\mathrm{Re}(w)}$ и $\left|e^w-1\right| \ge \left|\left|e^w\right|-1\right| = \left|e^{\mathrm{Re}(w)}-1\right|$, из леммы 3 получаем следующее:

$$\left\|F(t,x,0,\varepsilon)\right\| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\|V_k\|}{\varepsilon\left|e^{-p_k T/\varepsilon}-1\right|} \int_t^{t+T} \left|e^{p_k(t-s)/\varepsilon}\right| \left\|f(s,x-t+s)+\varepsilon g\left(s,x-t+s,0\right)\right\| ds \le$$

$$\le G_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{\|V_k\|}{\varepsilon\left|e^{-\mathrm{Re}(p_k)T/\varepsilon}-1\right|} \int_t^{t+T} e^{\mathrm{Re}(p_k)(t-s)/\varepsilon} ds = G_0 S, \tag{3}$$

где $G_0 := \left\|f(t,x)+\varepsilon g(t,x,0)\right\|; \quad S := \sum_{k=1}^{n} \frac{\|V_k\|}{\left|\mathrm{Re}(p_k)\right|}.$

Ограниченность $F(t,x,0,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ доказана.

Далее, так как

$$\left\|F(t,x,v,\varepsilon)-F(t,x,0,\varepsilon)\right\| \le \varepsilon L\|v\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\|V_k\|}{\varepsilon\left|e^{-\mathrm{Re}(p_k)T/\varepsilon}-1\right|} \int_t^{t+T} e^{\mathrm{Re}(p_k)(t-s)/\varepsilon} ds \le \varepsilon LS\|v\|, \tag{4}$$

то из оценок (3) и (4) следует, что $\|Iv\| \le \left(|\lambda|T\|K\| + \varepsilon L\right)S\|v\| + G_0 S.$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. При условии $\left(|\lambda|T\|K\| + \varepsilon L\right)S \le \alpha < 1,$ где α — некоторое вещественное число, интегральный оператор I является сжимающим.

Доказательство. Из последней строки доказательства леммы 4 видно, что шар $\|v\| \le \dfrac{1}{1-\alpha}G_0 S$ оператором I отображается в себя.

Докажем теперь сжимающее свойство оператора I. Для различных u_1 и u_2 из этого шара имеем, что

$$\|Iu_2 - Iu_1\| \le |\lambda|T\|K\|\|u_2-u_1\| + \left\|F(t,x,u_2,\varepsilon)-F(t,x,u_1,\varepsilon)\right\| \le$$
$$\le \left(|\lambda|T\|K\| + \varepsilon L\right)S\,\|u_2-u_1\| \le \alpha\|u_2-u_1\|.$$

Лемма 5 доказана.

Сформулируем и докажем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. Характеристические числа p_k, $k=1,...,n,$ матрицы D попарно различны и имеют ненулевые вещественные части: $\mathrm{Re}(p_k) \ne 0.$

2. Имеет место неравенство $\left(|\lambda|T\|K\| + \varepsilon L\right)S \le \alpha < 1.$

Тогда система уравнений (1) имеет единственное непрерывное, ограниченное и периодическое решение $u(t,x,\varepsilon)$ по аргументам $(t,x)\in\Omega,$ ограниченное также при $\varepsilon\to 0.$

Доказательство. Согласно лемме 1 система (1) эквивалентно преобразуется к системе интегральных уравнений (2), которая согласно леммам 4 и 5 имеет единственное непрерывное и ограниченное решение, ограниченное также при $\varepsilon\to 0$. Согласно лемме 2 такое решение должно быть периодическим. Теорема 1 доказана.

Замечание. Отметим, что условие 2) теоремы 1 является существенным и неулучшаемым, хотя носит характер только достаточного условия. В качестве подтверждения рассмотрим одномерный случай, когда матрица D состоит из единственного элемента $d_{11} \ne 0.$ Тогда упомянутое условие принимает вид

$$\left(|\lambda|T\|K\| + \varepsilon L\right)\frac{1}{d_{11}} \le \alpha < 1. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\varepsilon(u_t + u_x) + u(t,x) = \lambda\int_0^1 u(s,x)ds. \tag{6}$$

Очевидно, что $T = \|K\| = |d_{11}| = 1,$ $L = 0.$ Поэтому при выполнении условия (5), которое теперь принимает вид $|\lambda| \le \alpha < 1,$ уравнение (6) должно иметь единственное периодическое решение в соответствии с теоремой 1. Действительно, таким решением является $u \equiv 0.$

Пусть теперь условие $|\lambda| \le \alpha < 1$ не выполнено, к примеру, допустим, что $\lambda = 1.$ Тогда, как нетрудно заметить, уравнение (6) может иметь бесчисленное множество периодических решений вида $u(t,x) = C = const$ в нарушение заключения теоремы 1.

Список литературы

1 *Иманалиев М.И.* Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. — Фрунзе: Илим, 1974. — 352 с.

2 *Абиев Н.А.* Существование и единственность периодического и ограниченного решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — Вып. 27. — Бишкек: Илим, 1998. — С. 86–90.

3 *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. — М.: Мир, 1966. — 230 с.

4 *Абиев Н.А.* Существование периодического решения и его асимптотическая оценка для одной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — Вып. 28. — Бишкек: Илим, 1999. — С. 145–151.

5 *Абиев Н.А.* Асимптотическое разложение периодического решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром // Механика и моделирование процессов технологии. — 2009. — № 1. — С. 91–98.

Н.А.Әбиев, Ж.С.Шонтаева

Сингулярлы ауытқыған сызықсыз интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің периодты шешімінің бар болуы және жалғыздығы

Бірінші ретті дербес туындылы сингулярлы ауытқыған сызықсыз интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің периодты шешімдері зерттелді. Осындай теңдеулерді интегралдық теңдеулерге эквивалентті түрлендіруге болады. Периодты шешімнің бар болуын және жалғыздығын дәлелдеу, сондай-ақ оның аз параметр бойынша асимптотикасын табу біздің мақсатымыз болып табылады. Мақалада жоғарыда аталған сұрақтарға жауаптар алынған.

N.A.Abiev, Zh.S.Shontaeva

Existence and uniqueness of periodic solution of the system of singularly perturbed nonlinear integral-differential equations

We investigate periodic solutions of singularly perturbed nonlinear system of first order partial integral-differential equations. Such equations could be equivalently transformed to integral equations. Our interest are to prove existence and uniqueness of a periodic solution and find its asymptotic with respect to small parameter. Our main result gives an answer for questions above.

References

1 Imanaliev M.I. *Oscillations and stability of solutions of singularly perturbed integral-differential systems*, Frunze: Ilim, 1974, 352 p. (in Rus.).

2 Abiev N.A. *Study on integro-differential equations*, Bishkek: Ilim, 1998, 27, p. 86–90 (in Rus.).

3 Hale J. *Oscillations in nonlinear systems*, Moscow: Mir, 1966, 230 p. (in Rus.).

4 Abiev N.A. *Study on integro-differential equations*, Bishkek: Ilim, 1999, 28, p. 145–151 (in Rus.).

5 Abiev N.A. Mechanics and modeling of technology, 2009, 1, p. 91–98 (in Rus.).