

С.Б.Ахажанов, Ғ.Қ.Қаратаев

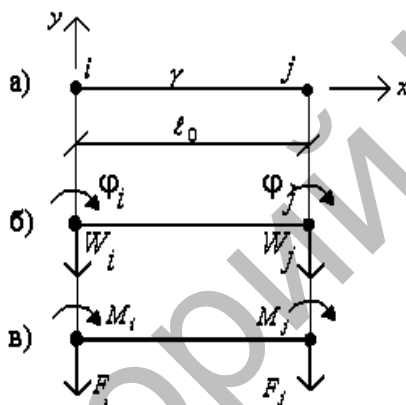
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті
(E-mail: stjg@mail.ru)

Күрделі рамалық құрылымдардың есептеуін автоматтандыру

Мақалада күрделі рамалық құрылымдардың есептеуін автоматтандыру қарастырылған. Рамалық құрылымдарды есептеу үшін ақырлы элементтер әдісі қолданылған. Ақырлы элемент үшін жалпы қатандық матрицасы табылған. Ақырлы элементтің негізгі тәуелділігі алынған. Мысал ретінде қатты рамалық құрылым қарастырылған. Нәтижелері кестелер түрінде көрсетілген және ішкі күштер эпюралары тұрғызылған. Сандық нәтижелер аналитикалық шешімдермен салыстырылған.

Кілт сөздер: деформация, кернеу, иілу, қатандық, рама, бойлық күш, көлденең күш, иілу моменті.

Жазықтықтағы өзектік жүйеден бір элементті бөліп алып, оны жергілікті координаттық жүйеде қарастырайық (1-а сур.).



1-сурет. Жалпыланған сызықтық ақырлы элемент

Бұл элементтің деформациялық күйі түйіндер жылжуларымен $(W_i, \varphi_i, W_j, \varphi_j)$ анықталады (1-сур., б), ал оның кернеулік күйі түйіндер күштерімен (F_i, M_i, F_j, M_j) табылады (1-сур., в). Қарастырылып отырған элементтің негізгі тәуелділігі былайша жазылады [1]:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= K \cdot \vec{V}, \quad K = \gamma \overset{\circ}{K} - \alpha \hat{K} - \beta \overset{\vee}{K}; \\ \vec{F}^T &= [F_i \quad M_i \quad F_j \quad M_j]; \\ \vec{V}^T &= [W_i \quad \varphi_i \quad W_j \quad \varphi_j]. \end{aligned} \tag{1}$$

Мұнда: \vec{F}, \vec{V} — түйіндер күштері мен жылжуларының векторлары; K — жалпы қатандық матрицасы; α, β, γ — негізгі параметрлер; $\overset{\circ}{K}, \hat{K}, \overset{\vee}{K}$ — әр түрлі себептерді сипаттайтын матрицалар.

Жалпыланған матрицаның құраушы матрицалары және негізгі параметрлері:

$$\overset{\circ}{K} = \frac{1}{\ell_0^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_0 & -12 & 6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 4\ell_0^2 & -6\ell_0 & 2\ell_0^2 \\ -12 & -6\ell_0 & 12 & -6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 2\ell_0^2 & -6\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix}; \quad \hat{K} = \frac{1}{\ell_0} \begin{bmatrix} 36 & 3\ell_0 & -36 & 3\ell_0 \\ 3\ell_0 & 4\ell_0^2 & -3\ell_0 & -\ell_0^2 \\ -36 & -3\ell_0 & 36 & -3\ell_0 \\ 3\ell_0 & -\ell_0^2 & -3\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix};$$

$$\check{K} = \ell_0 \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_0 & 54 & -13\ell_0 \\ 22\ell_0 & 4\ell_0^2 & 13\ell_0 & -3\ell_0^2 \\ 54 & 13\ell_0 & 156 & -22\ell_0 \\ -13\ell_0 & -3\ell_0^2 & -22\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix}; \quad \ell_0 = \frac{\ell}{L} = \frac{1}{n}; \quad W = \frac{\hat{W}}{L}; \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{J}{J_0}; \quad \alpha = \frac{\hat{N}L^2}{30EJ_0};$$

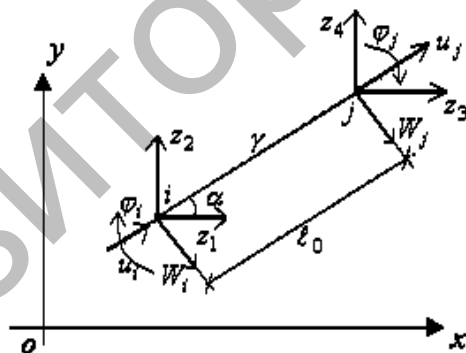
$$\beta = \frac{rL^4}{420EJ_0}; \quad F = \frac{\hat{F}L^2}{EJ_0}; \quad M = \frac{\hat{M}L}{EJ_0}; \quad \varphi = \hat{\varphi}.$$

Мұнда L, EJ_0, J_0 — жүйенің ұзындығы, иілу қатандығы және осьтік момент инерциясы; $\hat{N}, \hat{F}, \hat{M}$ — элементтің бойлық және көлденең күштері мен моменті; $\hat{W}, \hat{\varphi}$ — тік және бұрыштық жылжулар; ℓ, J — элементтің өлшемді ұзындығы мен осьтік момент инерциясы; ℓ_0, W, φ — элементтің өлшемсіз ұзындығы мен тік жылжу және бұрыштық жылжуы; n — жүйенің бөлінгендегі элементтер саны; r — жайылған күштің бірлік ауданындағы қарқындылығы. Сонымен, (1) жалпылаған элементтің өлшемсіз түрдегі негізгі тәуелділігі болып табылады. Элементтің негізгі тәуелділігін (1) қолдану арқылы және $\vec{F} \rightarrow \vec{P}; \gamma \cdot \overset{\circ}{K} \rightarrow A; \overset{\circ}{K} \rightarrow B; \overset{\circ}{K} \rightarrow C; \vec{V} \rightarrow \vec{u}$ ұмтылдыра отырып, жүйенің негізгі тәуелділігі алынады:

$$(A - \alpha \cdot B - \beta \cdot C) \vec{u} = \vec{P}. \quad (3)$$

Мұнда \vec{u}, \vec{P} — жүйенің түйіндеріндегі сыртқы күштер мен жылжулар векторлары; α, β — белгілі (белгісіз) параметрлер; A, B, C — сандық матрицалар.

Енді өзектік жүйеден бір элементті бөліп, оны XOY координаттық жазықтықта қарастырайық (2-сур.).



2-сурет. Жазықтықтағы ақырлы элемент

Бұл элементтің жергілікті жүйедегі жылжулары $U_i, W_i, \varphi_i, U_j, W_j, \varphi_j$, ал жалпы координаттық жүйедегі жылжулары $z_1, z_2, \varphi_i, z_3, z_4, \varphi_j$ болып табылады. Элементтің өлшемсіз осьтік момент инерциясы — γ , ал ұзындығы — ℓ_0 . Жергілікті координаттық жүйедегі элементтің негізгі тәуелділігін мына түрде қабылдаймыз:

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V};$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} N_i \\ F_i \\ M_i \\ N_j \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} K_{11}^0 & 0 & 0 & K_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 & K_{13} & K_{14} \\ 0 & K_{12} & K_{22} & 0 & K_{23} & K_{24} \\ K_{12}^0 & 0 & 0 & K_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{13} & K_{23} & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{14} & K_{24} & 0 & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix}; \vec{V} = \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ \varphi_i \\ U_j \\ W_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$K_{11}^0 = \frac{1}{\ell_0}; K_{12}^0 = -\frac{1}{\ell_0}.$$

Мұнда \vec{F}, \vec{V} — түйіндік күштер және жылжулар векторы; K_{11}, \dots, K_{44} — қатандық матрицасының элементтері. Олар (2) бойынша анықталады.

Элементтің ұзындығы және бағыттаушы косинустары түйіндер координаталары арқылы табылады:

$$\ell_0 = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}; \cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{\ell_0}; \sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{\ell_0}. \quad (5)$$

Ескі жылжулар жаңа жылжулармен былайша байланыста болмақ (2-сур. бойынша):

$$\begin{aligned} U_i &= z_1 \cos \alpha + z_2 \sin \alpha; W_i = z_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha; \\ U_j &= z_3 \cos \alpha + z_4 \sin \alpha; W_j = z_3 \sin \alpha - z_4 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Векторлық түрде былайша жазылады:

$$\vec{V} = C \cdot \vec{z}; C = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \varphi_i \\ z_3 \\ z_4 \\ \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Мұнда C — түрлендіру матрицасы; \vec{z} — жалпы координаттық жүйедегі түйіндер жылжулар векторы; $c = \cos \alpha$; $s = \sin \alpha$.

Негізгі тәуелділікті (4) сол жағынан транспонирленген матрицаға C^T көбейтіп, оны жалпы координаттық жүйеде былайша жазамыз:

$$\vec{R} = S \cdot \vec{z}; \vec{R} = C^T \cdot \vec{F}; S = C^T \cdot K \cdot C. \quad (8)$$

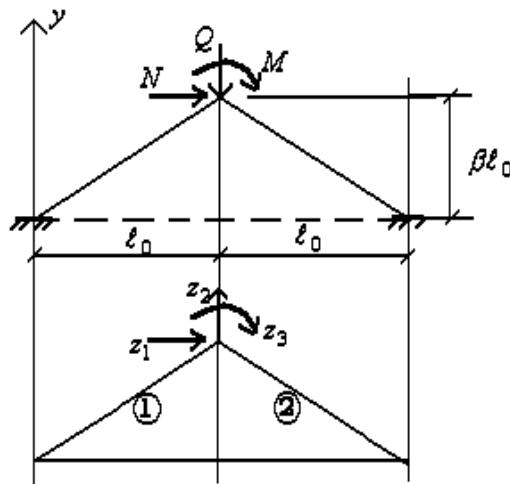
Мұнда S — қатандық матрицасы. Бұл матрица жалпы жағдайда бұрышқа α және матрицаларға $\overset{\circ}{K}, \overset{\vee}{K}, \hat{K}$ тәуелді болады. Олар (2) формула бойынша анықталады. Енді осы матрицаның жалпы түрін анықтайтын формуланы көрсетейік:

$$S = \begin{bmatrix} c^2 K_{11}^0 + s^2 K_{11} & cs(K_{11}^0 - K_{11}) & sK_{12} & c^2 K_{12}^0 + s^2 K_{13} & cs(K_{12}^0 - K_{13}) & sK_{14} \\ cs(K_{11}^0 - K_{11}) & s^2 K_{11}^0 + c^2 K_{11} & -cK_{12} & cs(K_{12}^0 - K_{13}) & s^2 K_{12}^0 + c^2 K_{13} & -cK_{14} \\ sK_{12} & -cK_{12} & K_{22} & sK_{23} & -cK_{23} & K_{24} \\ c^2 K_{12}^0 + s^2 K_{13} & cs(K_{12}^0 - K_{13}) & sK_{23} & c^2 K_{11}^0 + s^2 K_{33} & cs(K_{11}^0 - K_{33}) & sK_{34} \\ cs(K_{12}^0 - K_{13}) & s^2 K_{12}^0 + c^2 K_{13} & -cK_{23} & cs(K_{11}^0 - K_{33}) & s^2 K_{11}^0 + c^2 K_{33} & -cK_{34} \\ sK_{14} & -cK_{14} & K_{24} & sK_{34} & -cK_{34} & -cK_{44} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Бұл матрица бас диагональға байланысты симметриялы матрица болып табылады. Оның элементтері жалпы жағдайда (2) формуласы бойынша анықталады:

$$(K = \overset{\circ}{\gamma} K - \overset{\wedge}{\alpha} K - \overset{\vee}{\beta} K).$$

Мысал ретінде мынандай раманы есептеп көрелік (3-сур.). Бұл раманың көлденең қималары бірдей болсын ($\gamma = 1$).



3-сурет. Рама

Есептеу ретін қарастырайық:

1. Раманы екі элементке бөліп, оның ұзындықтарын анықтаймыз

$$l_1^0 = l_2^0 = l_0 \cdot \gamma_0; \gamma_0 = \sqrt{1 + \beta^2}.$$

2. Бағыттауыш косинустарын табамыз

$$\cos \alpha_1 = \frac{l_0}{l_1^0} = \frac{1}{\gamma_0}; \sin \alpha_1 = \frac{\beta l_0}{l_2^0} = \frac{\beta}{\gamma_0};$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{l_0}{l_2^0} = \frac{1}{\gamma_0}; \sin \alpha_2 = -\frac{\beta l_0}{l_2^0} = -\frac{\beta}{\gamma_0}.$$

(10)

3. Түйіндік жылжулар векторын жасактаймыз

$$[\bar{z}^{(1)}]^T = |0 \ 0 \ 0 \ z_1 \ z_2 \ z_3|; [\bar{z}^{(2)}]^T = |z_1 \ z_2 \ z_3 \ 0 \ 0 \ 0|.$$

4. Түйіндер арқылы тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз:

$$\text{а) } z_1: \vec{R}_4^{(1)} + \vec{R}_1^{(2)} = N: S_4^{(1)}\bar{z}^{(1)} + S_1^{(2)}\bar{z}^{(2)} = N \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3;$$

$$\text{б) } z_2: \vec{R}_5^{(1)} + \vec{R}_2^{(2)} = -Q: S_5^{(1)}\bar{z}^{(1)} + S_2^{(2)}\bar{z}^{(2)} = -Q \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3;$$

$$\text{в) } z_3: \vec{R}_6^{(1)} + \vec{R}_3^{(2)} = M: S_6^{(1)}\bar{z}^{(1)} + S_3^{(2)}\bar{z}^{(2)} = M \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3.$$

(11)

Осы теңдеулерді (9) матрицасын қолдану арқылы және K^0 матрицасы бойынша (2) ашып жазамыз:

$$\text{а) } [\ell_0^2 c \alpha_1^2 + 12 S \alpha_1^2] z_1 + c \alpha_1 S \alpha_1 (\ell_0^2 - 12) z_2 - 6 \ell_0 S \alpha_1 z_3 + [\ell_0^2 c \alpha_2^2 + 12 S \alpha_2^2] z_1 + c \alpha_2 S \alpha_2 (\ell_0^2 - 12) z_2 + 6 \ell_0 S \alpha_2 z_3 = N \ell_0^3 \gamma_0^3;$$

$$\text{ә) } c \alpha_1 S \alpha_1 (\ell_0^2 - 12) z_1 + [\ell_0^2 S \alpha_1^2 + 12 c \alpha_1^2] z_2 + 6 \ell_0 c \alpha_1 z_3 + c \alpha_2 S \alpha_2 (\ell_0^2 - 12) z_1 + [\ell_0^2 S \alpha_2^2 + 12 c \alpha_2^2] z_2 - 6 \ell_0 c \alpha_2 z_3 = -Q \ell_0^3 \gamma_0^3;$$

$$\text{б) } -6 \ell_0 S \alpha_1 z_1 + 6 \ell_0 c \alpha_1 z_2 + 4 \ell_0^2 z_3 + 6 \ell_0 S \alpha_2 z_1 - 6 \ell_0 c \alpha_2 z_2 + 4 \ell_0^2 z_3 = M \ell_0^3 \gamma_0^3.$$

Бұл теңдеулер бағыттауыш косинустарды (10) ескергенде былайша жазылады:

$$\text{а) } 2 \left(\ell_0^2 + 12 \frac{\beta^2}{\gamma_0^2} \right) z_1 - 12 \ell_0 \beta z_3 = N \ell_0^3 \gamma_0^3;$$

$$\text{ә) } 2\left(\ell_0^2\beta^2 + \frac{12}{\gamma_0^2}\right)z_2 = -Q\ell_0^3\gamma_0^3; \quad (12)$$

$$\text{б) } -12\ell_0\beta z_1 + 8\ell_0^2\gamma_0^2 z_3 = M\ell_0^3\gamma_0^3.$$

Осы теңдеулерден жылжуларды анықтаймыз

$$z_2 = -\frac{Q}{2} \frac{\ell_0^3\gamma_0^3}{\left(\ell_0^2\beta^2 + \frac{12}{\gamma_0^2}\right)}; z_1 = \frac{N\ell_0^3\gamma_0^3 + \frac{3}{2}M\ell_0^2\beta\gamma_0}{\left(2\ell_0^2 + 6\frac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)}; \quad (13)$$

$$z_3 = \frac{\frac{M}{4}\ell_0^3\gamma_0 + 3M\ell_0\frac{\beta^2}{\gamma_0} + \frac{3}{2}N\ell_0^2\beta\gamma_0}{\left(2\ell_0^2 + 6\frac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)}.$$

Бұл жылжулар рама арқалыққа айналғанда ($\beta = 0, \gamma_0 = 1$) мынандай мәндер қабылдайды:

$$z_2 = -\frac{Q\ell_0^3}{24}; z_1 = \frac{N\ell_0}{2}; z_3 = \frac{M\ell_0}{8}. \quad (14)$$

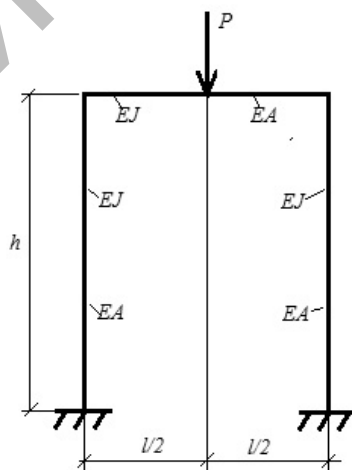
Енді (8) негізгі тәуелділікті қолдана отырып, элементтердің түйіндік күштерін анықтаймыз:

$$\left[\bar{R}^{(1)}\right]^T = \left[-\frac{N}{2}; \frac{Q}{2} + \frac{3M}{4\ell_0}; \frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{4}; \frac{N}{2}; -\frac{Q}{2} - \frac{3M}{4\ell_0}; \frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{2}\right]; \quad (15)$$

$$\left[\bar{R}^{(2)}\right]^T = \left[\frac{N}{2}; -\frac{Q}{2} + \frac{3M}{4\ell_0}; -\frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{2}; -\frac{N}{2}; \frac{Q}{2} - \frac{3M}{4\ell_0}; -\frac{Q\ell_0}{4} + \frac{M}{4}\right].$$

Алынған нәтижелер (14) және (15) екі шеті қатты бекітілген (статикалық анықталмаған) арқалықтың деформациялық z_1, z_2, z_3 және кернеулік күйлерін N, Q, M анықтауға мүмкіндік береді.

Енді осы ақырлы элементтер әдісін қолданып, келесі есепті шығарып көрелік. Бізге қатты рамалық құрылым берілсін $P = 1$ кН, $l = 1$ м, $h = 1$ м (4-сур.).



4-сурет. Қатты рамалық құрылым

Сыртқы күш әсер еткен кездегі раманың кернеулік және деформациялық күйлерін анықтауымыз қажет. Ол үшін раманың жартысын төрт элементке бөліп, түйіндерін, жылжуларын белгілейміз. Есепті шығару үшін бағдарлама құру керек.

Жалпы бағдарламасының қысқаша мағлұматы:

$N = 4$ — элементтер саны; $JZ = 5$ — түйіндер саны; $IZ = 15$ — жылжулар саны; $MP = 6$ — бекініс саны; $NP = 1$ — түйінге түскен күштер саны; $RM(2, N)$ — элементтің иілу қатаңдығы (EI); созылу (сығылу) қатаңдығы (EA); $RN(4, N)$ — элементтің x бойынша бастапқы координатасы (XI); соңғы (XJ), y бойынша (YI) және соңғы (YJ) координаталары беріледі; $IM(2, N)$ — түйіндер топологиясы (i, j, k, k, \dots); $KP(NP)$ — күштердің қай жылжу бойынша түскенін көрсетеді; $DP(NP)$ — күштің мәні, $JP(MP)$ — бекініс қай жылжуда екенін білдіреді; $IP(NC)$ — серпімді тіреу қай жылжуда екенін көрсетеді; $QP(NC)$ — серпімді тіреу қатаңдығының мәні.

Құрылған бағдарламаның нәтижелері 1,2-кестелер және эпюралар түрінде көрсетілген (5-сур.):

1 - кесте

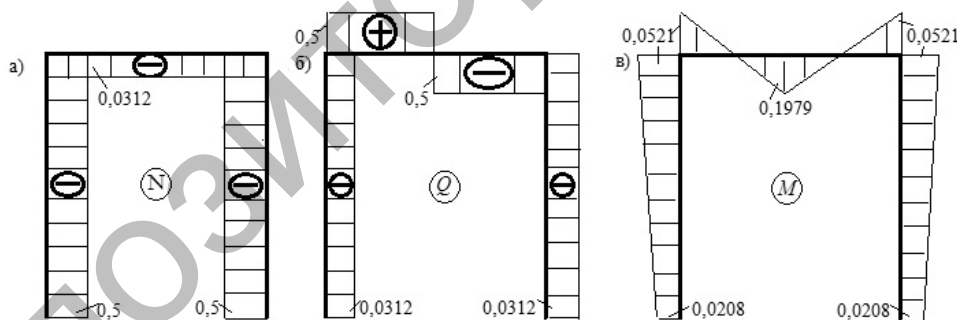
Бойлық, тік және бұрыштық жылжулар мәндері

Түйіндер	Жылжулар		
	U	W	φ
1	0	0	0
2	0,0156	0,4999	0,0364
3	0	0,5143	0
4	-0,0156	0,4999	-0,0364
5	0	0	0

2 - кесте

Бойлық күш, көлденең күш және иілу моменті мәндері

Элементтер	Ішкі күштер					
	N_i	Q_i	M_i	N_j	Q_j	M_j
1	-0,5	-0,0312	-0,0208	-0,5	-0,0312	-0,0521
2	-0,0312	0,5	-0,0521	-0,0312	0,5	0,1979
3	-0,0312	-0,5	0,1979	-0,0312	-0,5	-0,0521
4	-0,5	0,0312	-0,0521	-0,5	0,0312	-0,0208



5-сурет. Ішкі күштердің эпюралары

Мұнда $a)$ — бойлық күш; $b)$ — көлденең күш; $v)$ — иілу моментінің эпюралары. Олар қатты рамалық құрылымның кернеулік күйін көрсетеді. Осы ұқсастықпен жылжулар нәтижелерінің эпюраларын тұрғызып, раманың деформациялық күйін көрсетуге болады.

Есептің нәтижесін шолып өтетін болсақ, рама симметриялы болғандықтан, бойлық күште 1, 4 және 2, 3-ші элементтерінің өзгерулері бірдей және барлық элементтерінде қысылады, көлденең күш эпюрасында 2 мен 3-те күштің мәніне секіреді, ал иілу моменті эпюрасында ең үлкен иілу күш түскен нүктеде пайда болады.

Сонымен, ақырлы элементтер әдісін қолдану арқылы құрылған бағдарлама бойынша әдебиеттердегі [2, 3] кез келген түрдегі күрделі рамалық құрылымдарды есептеуге болады.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Тұрсынов К.А. Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі. — Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2004. — 53 б.
- 2 Киселев В.А. Строительная механика: Учебник для вузов. — 3-е изд., доп. — М.: Стройиздат, 1976. — 511 с.
- 3 Дарков А.В. и др. Строительная механика. — М.: Высш. шк., 1976. — 600 с.

С.Б.Ахажанов, Г.К.Каратаев

Автоматизированный расчет сложных рамных конструкций

В статье рассмотрен автоматизированный расчет сложных рамных конструкций. Для расчета был использован метод конечных элементов. Найдена общая матрица жесткости конечного элемента. Получена основная зависимость конечного элемента. Рассмотрен пример расчета жестких рамных конструкций. Результаты приведены в табличной форме и построены эпюры внутренних усилий. Численные результаты сравнены с аналитическими решениями.

S.B.Akhazhanov, G.K.Karatayev

The automated calculation of difficult frame designs

In this work the automated calculation of difficult frame designs is considered. For calculation of frame designs the method of final elements is used. The general matrix of rigidity of a final element is found. The main dependence of a final element is received. An example of calculation of rigid frame designs is reviewed. Results are given in a tabular form and curve the internal of efforts are constructed. Numerical results are compared to analytical decisions.

References

- 1 Tursynov K.A. *Method of the last elements in construction mechanics*, Karaganda: KSU Publ., 2004, 53 p.
- 2 Kiselyov V.A. *Construction mechanics. The textbook for higher education institutions*, Prod. 3, additional, Moscow: Stroyizdat, 1976, 511 p.
- 3 Darkov A.V. et al. *Construction mechanics*, Moscow: Higher school, 1976, 600 p.