УДК 510.67

Атомные и позитивно экзистенциально-замкнутые модели центра Δ-PM-теорий в обогащенной сигнатуре

Atomic and positive existentially closed model of centre of Δ-PM-theories in enriched signature

Ешкеев А.Р., Макажанова Т.Х., Муканов А.А.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: Modth1705@mail.ru)

Мақалада байытылған сигнатурада Δ-PM теориялардың кейбір атомдық модельдердің түрлері қарастырылған. Бұл теориялардың $(n+1)$-Δ-позитивті экзистенциалды тұйық атомдылылығы үшін арнайы түрдегі атомдық модельдері бар болуы арқылы критерийі келтірілді. Бұл жұмыстың негізгі зерттеу тәсілі йонсондық теорияларды зерттейтін семантикалық тәсіл болып табылады. Осы әдістің түйіні — йонсондық теорияның орталығының модельді-теоретикалық қасиеттерін өзіне тасымалдау.

This article discusses some kinds of atomic models - Δ-PM theories in the enriched signature. It presents a test of $(n+1)$-Δ — positive existential atomicity of these theories by the existence of a special type of atomic models. The main research method of this paper is a semantic method for Jonsson theories. Its essence is to transfer the model-theoretic properties of the center on the theory itself.

В своей обзорной статье «Основы теории моделей» в хорошо известной книге [1] крупный специалист в области теории моделей Дж. Кейслер условно разделил теорию моделей на две части: «западную» и «восточную». При этом он подчёркивает, что тематика западной теории моделей связана с задачами, возникавшими в проблемах математического анализа и теории чисел и, как правило, здесь используются произвольные формулы первого порядка.

С другой стороны, тематика восточной теории моделей связана с проблемами, возникавшими в задачах классической алгебры, и в этом случае используются формулы первого порядка, пренексный вид которых имеет длину не больше двух. Условность «географических» названий связана с местом проживания основоположников теории моделей. Тарский жил на западном побережье, а Робинсон на восточном побережье США.

Результаты данной работы по своему содержанию относятся к восточной теории моделей.

Данная статья представляет результаты авторов относительно тематики позитивной йонсоновской теории в обогащённой сигнатуре. Работа посвящена изучению счетных малых моделей и понятию экзистенциальной замкнутости, вообще говоря, неполных теорий в обогащённой сигнатуре. Под малыми моделями понимаются позитивные обобщения простых и атомных моделей. В [2] Воот доказал критерий простоты модели произвольной счетной теории. Оказалось, что модель проста тогда и только тогда, когда она счетна и атомна. Напомним, что модель теории называется простой, если она элементарно вкладывается в любую модель рассматриваемой теории.

В [3] исследуются связи между алгебраической простотой и различными видами атомности. Модель теории называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в любую модель данной теории. Под вложением понимается инъективное отображение. Как мы видим из определения, простая модель сохраняет все формулы языка в своем образе, а алгебраически простая — только лишь булевые комбинации атомарных формул. В [3] также было обобщено понятие атомности модели. Вместо классического определения атомности (модель атомна, если любой ее кортеж реализует главный тип) было рассмотрено понятие атомности в классическом случае, но только для определенного вида формул и эти виды, как правило, либо экзистенциональные формулы, либо универсальные, либо их пересечение.

Как показывают основные результаты этой статьи [3], результат, подобный теореме Воота об описании малых атомных моделей на языке алгебраической простоты, получить не удалось. Примеры, которые были приведены в [3], как правило, отражают примеры индуктивных теорий, относящихся по своей специфике к вышеуказанной восточной теории моделей.

В силу своего определения одним из достаточно интересных подклассов таких теорий является класс йонсоновских теорий. К ним, в частности, относятся такие классические объекты алгебры, как теории групп, абелевых групп, различные виды колец (том числе поля фиксированной характеристики), решетки, полигоны. При изучении йонсоновских теорий Т.Г.Мустафиным в работе [4] был доказан результат 5.7, который достигает целей, поставленных перед собой авторами в [3], но при этом на рассматриваемую теорию накладываются дополнительные условия, что не говорит об общности ситуации.

В рамках изучения йонсоновских теорий первым автором был определен и рассмотрен новый класс $\Delta - PJ$ -теорий (см. [5]). Причем при некоторых фиксированных Δ мы получаем йонсоновские теории, устойчивые относительно гомоморфизмов. Данная проблематика достаточно свежа. В относительно недавно опубликованной серии работ Бен-Якова [6, 7] изучаются некоторые понятия позитивной логики первого порядка и на их основе доказывается сводимость к ним соответствующих понятий логики первого порядка. К примеру, рассмотрена позитивная морлизация теории, которая позволяет не делать разницу между позитивно определимыми и позитивно бесконечно определимыми множествами. Синтаксической особенностью этих работ является элиминирование символа отрицания и квантора всеобщности в базисных формулах. Семантической же особенностью является замена понятий вложений и элементарных вложений на так называемые продолжения и погружения. В [5] рассмотрены позитивные аналоги йонсоновских теорий, но при этом их аксиомы несколько отличаются от базисных формул, например, из [6]. Таким образом, мы будем следовать идеологии изучения специфики йонсоновских теорий и при этом использовать аналоги теорем из [6, 7].

В [8] был введен класс теорий, который в пересечении с классом йонсоновских теорий обобщает его, а также содержит обобщенные йонсоновские теории, введенные в [4]. Интересно рассмотреть связь малых и экзистенциально замкнутых моделей в новом классе теорий. Напомним определение этого класса.

Определение. Теория T называется Δ-позитивно мустафинской (Δ-PM)-теорией, если:

1) теория T имеет бесконечные модели;

2) теория T является Π^{+}_{n+2} –аксиоматизируемой;

3) теория T допускает Δ-JEP;

4) теория T допускает Δ-AP.

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^{+}(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^{+}(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^{+}(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^{+}(At)) = L^{+}$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^{+})$ — это произвольная булева комбинация формул из L^{+}.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π^{+}_{n} — множество всех формул языка L^{+} вида $\forall\exists...\varphi$ (т.е. формулы из L^{+} с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Sigma^{+}_{n+1} \subseteq L^{+}$. Пусть T — Δ-PM -теория. Совместная с T Σ^{+}_{n+1}-формула $\varphi(\bar{x})$ языка L^{+} называется $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$-полной, если для любой Σ^{+}_{n+1}-формулы $\psi(\bar{x})$ либо $T \vdash \varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})$, либо $T \vdash \varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x})$. Совместная с T Σ^{+}_{n+1}-формула $\varphi(\bar{x})$ языка L^{+} называется $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$-пополняемой, если существует такая $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$-полная формула $\theta(\bar{x})$, что $T \vdash \theta(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})$. Теория T называется $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциальной атомной, если каждая Σ^{+}_{n+1}-формула $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$-пополняема. Модель A теории T называется $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$-атомной, если каждая последовательность $\bar{a} \in A$ удовлетворяет некоторой $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$-полной формуле. Модель A теории T называется $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ-гомоморфизма $h : A \xrightarrow[\Delta]{} B$ и любых $\bar{a} \in A$ и $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$ $B \models \exists\bar{y}\varphi(h(\bar{a}), \bar{y}) \Rightarrow A \models \exists\bar{y}\varphi(\bar{a}, \bar{y})$.

Обозначим через $E^{+}_{n+1}(T)$ множество всех $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории T. Появление символа $(n+1)$ важно, так как теория может быть $(n+1)$-аксиоматизируема, а Δ быть тривиальным, например, $\Delta = B^{+}(At)$.

В данной работе рассматриваются некоторые виды атомных моделей Δ-PM-теорий в обогащённой сигнатуре. Приводится критерий $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциальной атомности этих теорий.

Напомним содержание теорем из указанных выше работ, которые связаны с контекстом основных результатов данной работы.

Теорема 3.2 [3]. Пусть T — $\forall\exists$-теория полна для экзистенциальных предложений, пусть A — счетная модель T.

a) Тогда (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) и (ii) $\Rightarrow$ (ii)*, где

(i) A — $(\sum, \sum)$-атомная,

(ii) A — Σ^*- nice,

(ii)* A — экзистенциально замкнутая и Σ- nice,

(iii) A — слабо $(\sum, \Pi)$-атомная.

b) Если T полна для $\forall\exists$-предложений, тогда условия (i), (ii), (ii)* и (iii) эквивалентны.

Теорема 5.3 [4]. Каждая $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$- атомная модель T является $\Sigma_{\alpha+1}$-замкнутой.

Теорема 5.5 [4]. Пусть T обладает α-JEP. Тогда следующие условия эквивалентны:

– теория T является $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$- атомной;

– теория T имеет счетную $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$-атомную модель.

Следующий результат из [9] является обобщением результатов 5.3 из [4] и 3.2 из [3] для Δ-PM-теорий.

Теорема 1 [9]. Пусть T — Δ-PM-теория. Тогда каждая $(\Sigma^+_{n+1}, \Sigma^+_{n+1})$-атомная модель теории T принадлежит $E^+_{n+1}(T)$.

Следующий результат из [9] является обобщением результата 5.5 из [4].

Теорема 2 [9]. Пусть T — Δ-PM-теория. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) теория T является $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциальной атомной; 2) теория T имеет счетную $(\Sigma^+_{n+1}, \Sigma^+_{n+1})$-атомную модель.

В последнее время в теории моделей часто встречаются работы, связанные с обогащением сигнатуры. В каждом случае это свои специфические интересы. Например, обогащение константами или предикатами. В [10] была рассмотрена йонсоновская интерпретация выделения собственной элементарной подмодели. Соответственно, в такой стуации все указанные выше вопросы имеют место быть и было бы интересно их рассмотреть.

Дадим необходимые определения, связанные с обогащением сигнатуры $\Delta-PM$-теории. Пусть T есть произвольная $\Delta-PM$-теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. $A \subseteq C$. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Пусть $T^{PM}_\Gamma(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C, a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ.

Рассмотрим все пополнения центра T^* теории $\Delta-PM$ в новой сигнатуре $\Delta-PM$. Следующий факт позволяет работать с позитивными обобщениями йонсоновских теорий в обогащённой сигнатуре. Заметим (*) (взято из [10]), что если теория $\Delta-PM$ σ-йонсоновская, то в обогащенном языке относительно условий теоремы центр T^* будет таким же, т.е. T-теорией. Это достигается следующим образом: константы будут переходить в образы констант, реализация предиката — в образ реализации. Необходимые образы получаются за счет соответствующих отображений, которые нам обеспечивают условия σ_Γ и $\Gamma = \{c\}$ из $\Delta-PM$-йонсоновости изначальной теории T^*. Далее, в силу того, что по условию T^c совершенна как α-йонсоновская теория, то T^c является σ теорией.

Тогда существует ее центр, и он является одним из пополнений теории T^c в обогащенном языке.

Следующий результат является обобщением результатов 5.3 из [1], 3.2 из [2] и 1 из [9].

Теорема 1. Пусть T — совершенная, α-йонсоновская Δ-PM-теория, полная относительно Π^+_{n+2}. Тогда каждая $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$-атомная модель теории T^* принадлежит $E^+_{n+1}(T^*)$, где T^* — центр теории T в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$.

Доказательство. В силу указанной выше (*) нам достаточно заметить, что класс позитивно экзистенциально-замкнутых моделей в условиях нашей теоремы как для самой теории, так и для её центра в обогащённой сигнатуре совпадает, а значит, мы можем повторить рассуждения из [9]. По определению позитивно экзистенциальной замкнутости нужно показать, что если A, B — такие две модели теории T, что для каждого Δ-гомоморфизма $h: A \xrightarrow[\Delta]{} B$ и любых $\overline{a} \in A$ и $\varphi(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta$ $B \models \exists\overline{y}\varphi(h(\overline{a}),\overline{y})$, то верно, что $A \models \exists\overline{y}\varphi(\overline{a},\overline{y})$. В частности, $A \subseteq_{\Pi^+_n} B$, $\overline{a} \in A$, $\varphi(\overline{x}) \in \Sigma^+_{n+1}$, $B \models \varphi(\overline{a})$. Предположим, что $\theta(\overline{x})$ такая $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$-полная формула, что $A \models \theta(\overline{a})$. Тогда $B \models \theta(\overline{a})$. Поэтому $B \models \theta(\overline{a}) \to \varphi(\overline{a})$. Следовательно, неверно $T \vdash \theta(\overline{x}) \to \neg\varphi(\overline{x})$. Тогда $T \vdash \theta(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x})$. Значит, $A \models \varphi(\overline{a})$.

Следующий результат является обобщением результатов 5.5 из [1] и 2 из [9].

Теорема 2. Пусть T — совершенная α-йонсоновская Δ-PM-теория, полная относительно Π^+_{n+2}; T^* — центр теории T в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) теория T^* является $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциальной атомной;

2) теория T^* имеет счетную $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$-атомную модель.

Доказательство. В силу указанной выше (*) нам опять же достаточно заметить, что класс позитивно экзистенциально-замкнутых моделей в условиях нашей теоремы как для самой теории, так и для её центра в обогащённой сигнатуре совпадает, и мы можем повторить рассуждения из [9], лишь только с той разницей, что надо заботиться о сохранении свойств Δ-JEP и Δ-AP в обогащённой сигнатуре, а это следует из рассуждений подобно работе [10], а также, как и в [6], мы используем тот факт, что Δ можно рассмотреть как наименьший позитивный фрагмент, т.е. замкнутое множество бескванторных формул. Далее основное утверждение следует из соответствующей теоремы об опускании позитивных типов и того факта, что Δ-PM-теория допускает по определению Δ-JEP.

Все неопределенные в этой статье определения понятий, а также более полную информацию о йонсоновских теориях и их позитивных обобщениях можно получить в [11].

References

1. Handbook of mathematical logic. J.Barwise (ed.) Model theory. — Vol 1. (russian trans.) — M.: Science, 1982. — P. 126.
2. *Vaught R.L.* Denumerable models of complete theories // Infinitistic Methods. — London: Pergamon, 1961.
3. *John T.Baldwin, David W.Kueker.* Algebraically prime models. Annals of Mathematical Logic. — 20 (1981).
4. *Mustafin T.G. //* Generalized Jónsson Conditions and a Description of Generalized Jónsson Theories of Boolean Algebras: Mat. Tr. — 1;2 (1998).
5. *Yeshkeyev A.R.* Categorical positive theories syntax and semantics of logical systems // Proceedings of the Russian school-seminar, devoted to 100 anniversary — birthday of Kurt Gödel, 23–27 August 2006, Irkutsk, Institute of Mathematics, Univ of state. Ped. Univ. — 2006. — P. 124.
6. *Itay Ben-Yaacov.* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 3 (2003). — № 1.
7. *Itay Ben-Yaacov.* Compactness and independence in non first order frameworks. — Bulletin of Symbolic logic. Vol. 11. — 2005. — № 1.
8. *Yeshkeyev A.R.* Countable categorisity of Δ-*PM*- theories. Abstracts: 12th Conference of the Universities in mathematics, mechanics and computer science. — Almaty, 2008.
9. *Yeshkeyev A.R., Meirembayeva N.K.* Properties of $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$ - atomic models of Δ-*PM*- theory // Messenger of the KNU. — A series of mathematics, mechanics, computer science. — № 3. — Special Issue. — 2008.
10. *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson's stability and some its generalizations // Fundamental and applied mathematics. — M.: MGU, CNIT, 2008. — Vol. 8. — P. 117–128.
11. *Yeshkeyev A.R.* Jonsson's theories. — Karagandy: Publish. KarSU, 2009. — 250 p.