

Numerical implementation of the algorithm for the dynamic problem of elasticity

Authors have implemented an algorithm of three-dimensional dynamic problem of elasticity «in the speeds-pressures» that uses an operator splitting Lamé. We consider the grid problem «in the speeds-pressures» within the three-dimensional case, where we prove a theorem and the theorem of additivity of conservative schemes. Three-dimensional dynamic problem of elasticity theory in «speeds-pressures» solved by the sweep method, the algorithm is implemented in the programming language Delphi 7.0 with the construction of graphs of functions test and approximate solutions on grids of different accuracy. The authors' objective was to implement the algorithm of three-dimensional dynamic problem of elasticity «in the speeds-pressures» and to compare test and approximate solutions in the calculations, with varying degrees of accuracy. The purpose been achieved entirely.

References

- 1 Konovalov A.N., Sorokin S.B. *Structure of the equations of the theory of elasticity. Statics*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1986, p. 10–23.
- 2 Tsurikov N.V. *Numerical solution of elasticity in arbitrary curvilinear coordinates*, Novosibirsk: Nauka, 1992, p. 111–120.
- 3 Bukenov M.M. *Small parameters in the algorithms of elasticity*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1986, p. 125–132.
- 4 Konovalov A.N. *Journal of Differential Equations*, 2010, 46 (7), p. 1004–1010.
- 5 Konovalov A.N. *Elasticity problem in pressures*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1978, p. 130–133.
- 6 Konovalov A.N. *Solution of elasticity in pressures*, Novosibirsk: Nauka, 1979, p. 233–240.
- 7 Popov Yu.P., Samarskii A.A. *Journal of Numerical Mathematics and Mathematical Physics*, 1969, 9 (4), p. 953–958.
- 8 Samarskii A.A., Popov Yu.P. *Difference schemes of gas dynamics*, Moscow: Nauka, 1975, p. 242–256.
- 9 Konovalov A.N. *Numerical methods in dynamic problems of the theory of elasticity* // *Siberian Mathematical Journal*, 1997, 38 (3), p. 551–569.
- 10 Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu. *Journal of Differential Equations*, 1982, 18 (7), p. 1251–1256.
- 11 Samarskii A.A., Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A. et al. *Difference schemes for nonlinear schemes*, Minsk: Kriterii, 1996, p. 263–275.
- 12 Bukenov M.M. *Fictitious domain method for Maxwell medium*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1985, p. 117–125.
- 13 Fichera G. *Existence theorems in the theory of elasticity*, Moscow: Mir, 1974, p. 110–112
- 14 Filin A.P. *Applied mechanics of solid deformable body: Textbook*, Moscow: Nauka, 1978, p. 458–519.

УДК 517.51

Е.Д.Нурсултанов¹, Д.К.Дарбаева²¹Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (Казахстанский филиал);²Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: d.darbaeva@yandex.kz)

Об операторе свертки в пространствах типа Морри

В статье исследованы верхние оценки нормы оператора свертки в пространствах типа Морри. Введены пространства $M_{p,q}^\alpha$, которые охватывают классические пространства Морри, исследованы их свойства вложения, описаны интерполяционные свойства. Доказаны неравенства типа Юнга-О'Нейла в обобщенных пространствах типа Морри.

Ключевые слова: пространства Морри, оператор свертки, неравенство Юнга-О'Нейла, интерполяционные теоремы.

1. Введение. Пусть $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$. Множество всех измеримых по Лебегу функций

$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ называется пространством Морри, если конечна следующая величина:

$$\|f\|_{M_p^\lambda} = \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_r(x))} < \infty.$$

Здесь $B_r(x)$ — шар с центром в точке x и радиусом $r > 0$. Заметим, если $\lambda = 0$, то $M_p^0(R^n) = L_p(R^n)$, если $\lambda = \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$, то $M_p^{\frac{n}{p}}(R^n) = L_\infty(R^n)$, а если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где Θ —

множество всех эквивалентных нулю функций на R^n (см. [1]).

Пространства Морри были введены Морри [1] в 1938 г. и изучались вследствие вопросов регулярных решений нелинейных эллиптических уравнений и систем. В последние два десятилетия был проявлен большой интерес к изучению общих пространств типа Морри и классических операторов теории функций, действующих в этих пространствах (см. обзорные статьи [2–4]).

В данной работе мы изучаем оценки нормы оператора свертки

$$(Tf)(x) = (K * f)(x) = \int_{R^n} K(x-y)f(y)dy,$$

действующего из одного обобщенного пространства типа Морри $M_{p,q}^\alpha$ в другое. Здесь $K(\cdot)$ — локально интегрируемая функция на R^n .

Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, тогда $K * f \in L_q(R^n)$, причем имеет место неравенство

$$\|K * f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p} \|K\|_{L_r}.$$

О'Нейл [5] получил более сильное неравенство Юнга следующим образом. Пусть $1 < p, q, r < \infty$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|K * f\|_{L_p \rightarrow L_q} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}},$$

где $L_{r,\infty}$ — пространство Марцинкевича.

Дальнейшие результаты обобщений неравенства Юнга-О'Нейла были получены в работах Блозинского [6], Кермана [7], Костюченко и Нурсултанова [8], Степанова [9], Нурсултанова и Тихонова [10] и др. В данной работе мы также продолжаем исследовать неравенство Юнга-О'Нейла для случая пространств типа Морри, а именно, мы докажем аналог неравенства Юнга-О'Нейла для классических пространств Морри.

2. Пространства $M_{p,q}^\alpha$. Пусть $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 \leq \alpha \leq \frac{n}{p}$. Определим обобщенные

пространства типа Морри $M_{p,q}^\alpha$ как множество всех измеримых по Лебегу функций $f \in L^{loc}(R^n)$, для которых конечна следующая норма при $q < \infty$:

$$\|f\|_{M_{p,q}^\alpha} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha} \sup_{x \in R^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

и при $q = \infty$ норма

$$\|f\|_{M_{p,\infty}^\alpha} = \sup_{x \in R^n} \sup_{t > 0} t^{-\alpha} \|f\|_{L_p(B_t(x))}.$$

Заметим, что введенные таким образом пространства являются обобщением классических пространств Морри при $q = \infty$, то есть $M_{p,\infty}^\alpha = M_p^\lambda$. Приведем некоторые свойства введенных пространств.

Лемма 1.

(i). Если $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, то $M_{p_1,q}^{\alpha_1} \hookrightarrow M_{p_0,q}^{\alpha_0}$, где $\alpha_0 = \alpha_1 - \frac{n(p_0 - p_1)}{p_0 p_1}$;

(ii). Если $0 < q_0 < q_1 \leq \infty$, то $M_{p,q_0}^\alpha \hookrightarrow M_{p,q_1}^\alpha$.

Доказательство. (i). Пусть $f \in M_{p_1,q}^{\alpha_1}$. Применяя неравенство Гёльдера и принимая во внимание, что $|B_t(x)| \sim t^n$, получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_{p_0,q}^{\alpha_0}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha_0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_0}(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha_0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_1}(B_t(x))} |B_t(x)|^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \cong \\ &\cong \left(\int_0^\infty \left(t^{-\left(\alpha_0 - \frac{n(p_1-p_0)}{p_0 p_1}\right)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_1}(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \|f\|_{M_{p_1,q}^{\alpha_1}}, \end{aligned}$$

что означает вложение $M_{p_1,q}^{\alpha_1} \hookrightarrow M_{p_0,q}^{\alpha_0}$.

(ii). Сначала пусть $q_1 = \infty$ и $f \in M_{p,q_0}^\alpha$. Докажем, что $M_{p,q_0}^\alpha \hookrightarrow M_{p,\infty}^\alpha$.

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_{p,\infty}^\alpha} &= \sup_{t>0} t^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))} = \\ &= (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \tau^{-\alpha q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))}. \end{aligned}$$

Заметим, что $B_t(x) \subset B_\tau(x)$, если $t \leq \tau$, тогда

$$\|f\|_{M_{p,\infty}^\alpha} = (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty (\tau^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_\tau(x))})^{q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q_0}} = (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \|f\|_{M_{p,q_0}^\alpha}. \quad (1)$$

Если $q_1 < \infty$, то достаточно воспользоваться интерполяционным неравенством

$$\|f\|_{M_{p,q_1}^\alpha} \leq (\|f\|_{M_{p,\infty}^\alpha})^{1-\frac{q_0}{q_1}} (\|f\|_{M_{p,q_0}^\alpha})^{\frac{q_0}{q_1}}$$

и неравенством (1). Таким образом, $M_{p,q_0}^\alpha \hookrightarrow M_{p,q_1}^\alpha$. Лемма доказана. \square

В дальнейшем нам понадобится также локальный вариант пространств типа Морри. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, пространство $LM_{p,q,x}^\alpha$ определяется с помощью квазинормы:

$$\|f\|_{LM_{p,q,x}^\alpha} = \left(\int_0^\infty (t^{-\alpha} \|f\|_{L_p(B_t(x))})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

при $0 < q < \infty$ и с обычной модификацией при $q = \infty$. Здесь $LM_{p,q,0}^\alpha = LM_{p,q}^\alpha$ — локальные пространства типа Морри, введенные в работе [11].

Утверждения леммы 1 также имеют место для пространств $LM_{p,q,x}^\alpha$.

В работе [12] была получена следующая интерполяционная теорема:

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \frac{n}{p}$, $0 < \beta_0 < \beta_1 < \frac{n}{q}$, $0 < p, q < \infty$, и пусть T — линейный оператор.

Если для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Tf\|_{LM_{p,\infty,x}^{\alpha_i}} \leq M_i \|f\|_{LM_{q,1,x}^{\beta_i}}, \quad i = 0, 1,$$

тогда

$$\|Tf\|_{M_{p,\tau}^\alpha} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{M_{q,\tau}^\beta},$$

где $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1$, $0 < \tau \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, и c зависит только от параметров $p, \beta_0, \beta_1, \theta$.

В следующем разделе мы хотим показать, как применение теоремы 1 позволяет получить аналог неравенства Юнга-О'Нейла для пространств типа Морри.

3. Неравенство типа Юнга-О'Нейла в обобщенных пространствах типа Морри $M_{p,q}^\alpha$.

Лемма 2. Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Пусть $B_t(z_1), B_t(z_2)$ — шары с центрами в точках $z_1 \in R^n$ и $z_2 \in R^n$, соответственно, и радиуса $t > 0$. Если $f \in L_p(B_t(z_2))$ и $K \in L_r(B_{2t}(z_1 - z_2))$, тогда оператор свертки

$$(K * f)(x) = \int_{B_t(z_2)} K(x-y)f(y)dy$$

принадлежит пространству $L_q(B_t(z_1))$. Кроме того, верна следующая оценка:

$$\|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} \leq \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}. \quad (2)$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству неравенства Юнга. Заметим, что для случая, когда $q = \infty$, неравенство (2) при $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ следует из неравенства Гёльдера. Рассмотрим случай $q < \infty$ и оценим оператор свертки следующим образом:

$$|(K * f)(x)| = \left| \int_{B_t(z_2)} K(x-y)f(y)dy \right| \leq \int_{B_t(z_2)} (|f(y)|^p |K(x-y)|^r)^{\frac{1}{q}} |K(x-y)|^{1-\frac{r}{q}} |f(y)|^{1-\frac{p}{q}} dy.$$

Применяя неравенство Гёльдера для трех сомножителей при $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{q}\right) + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{p}{q}\right) = 1$, получим

$$\begin{aligned} |(K * f)(x)| &= \left(\int_{B_t(z_2)} (|f(y)|^p |K(x-y)|^r) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_t(z_2)} |K(x-y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \times \\ &\times \left(\int_{B_t(z_2)} |K(x-y)|^r dy \right)^{1-\frac{r}{q}} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p dy \right)^{1-\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для любой точки $x \in B_t(z_1)$ множество $x - B_t(z_2) \subset B_{2t}(z_1 - z_2)$, а также, используя неотрицательность функции K , имеем

$$\int_{B_t(z_2)} |K(x-y)|^r dy = \int_{x-B_t(z_2)} |K(y)|^r dy \leq \int_{B_{2t}(z_1-z_2)} |K(y)|^r dy.$$

Следовательно,

$$|(K * f)(x)| \leq \left(\int_{B_t(z_2)} (|f(y)|^p |K(x-y)|^r) dy \right)^{\frac{1}{q}} \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))}^{1-\frac{r}{q}} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}^{1-\frac{p}{q}}.$$

Далее рассмотрим оператор свертки в пространствах Лебега $L_q(B_t(z_1))$ и поменяем порядок интегрирования, в итоге получим

$$\begin{aligned} \|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} &\leq \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))}^{1-\frac{r}{q}} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{B_t(z_1)} \int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p |K(x-y)|^r dy dx \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))}^{1-\frac{r}{q}} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p \left(\int_{B_t(z_1)} |K(x-y)|^r dx \right) dy \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Аналогично учитывая, что для любой точки $y \in B_t(z_2)$ множество $B_t(z_1) - y \subset B_{2t}(z_1 - z_2)$, а также, используя неотрицательность функции K , как и в предыдущем случае, получим

$$\int_{B_t(z_1)} |K(x-y)|^r dx = \int_{B_t(z_1)-y} |K(x)|^r dx \leq \int_{B_{2t}(z_1-z_2)} |K(x)|^r dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} &\leq \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p \left(\int_{B_{2t}(z_1-z_2)} |K(x)|^r dx \right) dy \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}, \end{aligned}$$

откуда получаем нужное нам неравенство. \square

Лемма 3. Пусть $1 < p, q, r < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Пусть $B_t(z_1), B_t(z_2)$ — шары с центрами в точках $z_1 \in R^n$ и $z_2 \in R^n$, соответственно, и радиуса $t > 0$. Если $f \in L_p(B_t(z_2))$ и $K \in L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))$, тогда оператор свертки $K * f \in L_q(B_t(z_1))$. Кроме того, верна следующая оценка:

$$\|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))},$$

где c зависит только от параметров p, q и r .

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем константы c — разные в разных формулах, они зависят только от числовых параметров и не зависят от функций f и K .

Доказательство. 1. Покажем сначала истинность следующего неравенства. Пусть $1 < p, q, r < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$. Тогда

$$\|K * f\|_{L_{q,\infty}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))}. \quad (3)$$

Рассмотрим пары чисел $(q_0, q_1), (r_0, r_1)$ такие, что $1 < r_0 < r < r_1 < \infty$, $1 < q_0 < q < q_1 < \infty$ и

$$\frac{1}{r_i} - \frac{1}{q_i} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}, \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Очевидно, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{r_i} = \frac{1}{q_i} + 1$. Далее зафиксируем параметр $p \in (1, \infty)$ и функцию $f \in L_p(B_t(z_2))$.

Тогда для линейного оператора $T_f(K) = K * f$ от аргумента K можно применить лемму 2, а значит выполняются следующие оценки:

$$T_f(K) : L_{r_0}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_0}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{r_0}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_0}(B_t(z_1))} \leq \|f\|_{L_p(B_t(z_2))};$$

$$T_f(K) : L_{r_1}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_1}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{r_1}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_1}(B_t(z_1))} \leq \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}.$$

Согласно общей интерполяционной теореме Марцинкевича (см. [13; 148]), мы приходим к выводу, что

$$T_f : L_{r(\theta),\infty}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q(\theta),\infty}(B_t(z_1))$$

с нормой $\|T\|_{L_{r(\theta),\infty}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q(\theta),\infty}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}$, где $\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ и $\frac{1}{q(\theta)} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. (Здесь $L_{r,\infty}$ — пространство Марцинкевича.)

Далее заметим, что найдется $\theta \in (0, 1)$ такое, что $r(\theta) = r$, но тогда из (4) следует, что $q(\theta) = q$, следовательно,

$$\|K * f\|_{L_{q,\infty}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$, откуда получили неравенство (3).

2. Покажем теперь неравенство

$$\|K * f\|_{L_{q,\tau}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_{p,\tau}(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))}, \quad (5)$$

где $1 < p, q, r < \infty$, $0 < \tau \leq \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$.

Аналогично рассмотрим пары чисел $(p_0, p_1), (q_0, q_1)$ такие, что $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$, $1 < q_0 < q < q_1 < \infty$ и $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Очевидно, что $1 + \frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{r}$, $i = 0, 1$.

Зафиксируем параметр $r \in (1, \infty)$ и функцию $K \in L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))$. Тогда, пользуясь оценкой (3), для линейного оператора $T_K(f) = K * f$ имеем

$$T_K(K) : L_{p_0}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_0, \infty}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{p_0}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_0, \infty}(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))};$$

$$T_K(K) : L_{p_1}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_1, \infty}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{p_1}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_1, \infty}(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))}.$$

Тогда, в силу интерполяционной теоремы Кальдерона (см. [13; 149]), получим

$$T_K : L_{p, \tau}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q, \tau}(B_t(z_1))$$

с нормой $\|T\|_{L_{p, \tau}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q, \tau}(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$ и $0 < \tau \leq \infty$, то есть

$$\|K * f\|_{L_{q, \tau}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_{p, \tau}(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))},$$

откуда получили неравенство (5).

3. Заметим, что, по условию леммы, $p \leq q$, следовательно, имеет место свойство вложения в пространствах Лоренца, а именно $L_{q, p}(B_t(z_1)) \hookrightarrow L_{q, q}(B_t(z_1))$, что в свою очередь $L_{q, q}(B_t(z_1)) = L_q(B_t(z_1))$. Далее вернемся к неравенству (5) и заменим параметр $\tau = p$, тогда получим

$$\|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} \leq c \|K * f\|_{L_{q, p}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_{p, p}(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))} =$$

$$= c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))},$$

тем самым получили утверждение леммы. □

Теорема 2. Пусть $1 < p, q < \infty$, $0 < \nu < \frac{n}{p}$, $0 < \lambda < \frac{n}{q}$ и $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda - \nu}{n}$. Если $f \in LM_{p, \infty, z}^\nu$ и $K \in L_{r, \infty}(R^n)$, тогда оператор свертки $K * f \in LM_{q, \infty, z}^\lambda$. Кроме того, верна следующая оценка для любой точки $z \in R^n$:

$$\|K * f\|_{LM_{q, \infty, z}^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p, \infty, z}^\nu},$$

где c не зависит от функции K .

Доказательство. Возьмем r_1 таким, что $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{p}$. Тогда, согласно лемме 3, при $\mu = \lambda - \nu$ имеем

$$t^{-\lambda} \|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} \leq c t^{-\mu} \|K\|_{L_{r_1, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))} t^{-\nu} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}. \quad (6)$$

Учитывая тот факт, что $m\{B_{2t}(z_1 - z_2)\} = S_n(2t)^n$, где S_n — площадь n -мерной сферы, получаем:

$$\sup_{t>0} t^{-\mu} \|K\|_{L_{r_1, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))} = \sup_{t>0} t^{-\mu} \sup_{0 < s < S_n(2t)^n} s^{\frac{1}{r_1}} K^*(s) =$$

$$= \sup_{t>0} t^{-\mu} \sup_{0 < s < S_n(2t)^n} s^{\frac{\mu}{n}} s^{\frac{1-\mu}{r_1 n}} K^*(s) \leq S_n^{\frac{\mu}{n}} 2^{\mu} \sup_{s>0} s^{\frac{1-\mu}{r_1 n}} K^*(s) = c \|K\|_{L_{r, \infty}(R^n)},$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{\lambda - \nu}{n}$.

Далее, вернувшись к оценке (6), взяв с обеих сторон точную верхнюю грань по всем $t > 0$ и положив $z_1 = z_2 = z$, получим для произвольно взятой точки $z \in R^n$ оценку нормы свертки в локальных пространствах типа Морри

$$\|K * f\|_{LM_{q, \infty, z}^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p, \infty, z}^\nu},$$

где c зависит только от параметров p, q, λ, ν и размерности n . Теорема доказана. □

Теорема 3. Пусть $1 < p, q < \infty, 0 < \tau \leq \infty, 0 < \nu < \frac{n}{p}, 0 < \lambda < \frac{n}{q}$ и $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda - \nu}{n}$. Если $f \in M_{p,\tau}^\nu$ и $K \in L_{r,\infty}(R^n)$, тогда оператор свертки $K * f \in M_{q,\tau}^\lambda$ и существует c , не зависящее от K , что для нормы оператора свертки справедливо неравенство

$$\|K * f\|_{M_{p,\tau}^\nu \rightarrow M_{q,\tau}^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)},$$

в частности, если $\tau = \infty$, то

$$\|K * f\|_{M_p^\nu \rightarrow M_q^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)}.$$

Доказательство. Так как $0 < \nu < \frac{n}{p}, 0 < \lambda < \frac{n}{q}$, то существуют ν_0, ν_1 и λ_0, λ_1 такие, что $0 < \nu_1 < \nu < \nu_0 < \frac{n}{p}$ и $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_0 < \frac{n}{q}$. Положим

$$\nu_0 - \lambda_0 = \nu_1 - \lambda_1 = \nu - \lambda. \tag{7}$$

В силу теоремы 2 для любой точки $z \in R^n$ имеют место слабые оценки

$$\|K * f\|_{LM_{q,\infty,z}^{\lambda_i}} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p,\infty,z}^{\nu_i}}, \quad i = 0, 1.$$

Учитывая тот факт, что имеется вложение $LM_{p,1,z}^{\nu_i} \hookrightarrow LM_{p,\infty,z}^{\nu_i}$ относительно второго параметра, следовательно, для любой точки $z \in R^n$ получим следующую оценку:

$$\|K * f\|_{LM_{q,\infty,z}^{\lambda_i}} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p,1,z}^{\nu_i}}, \quad i = 0, 1.$$

Но тогда, интерполируя эти неравенства, в силу теоремы 1 следует, что верно и сильное неравенство

$$\|K * f\|_{M_{q,\tau}^\lambda} \leq c (\|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)})^{1-\theta} (\|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)})^\theta \|f\|_{M_{p,\tau}^\nu} = c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)} \|f\|_{M_{p,\tau}^\nu},$$

где $0 < \tau \leq \infty, \nu = (1-\theta)\nu_0 + \theta\nu_1, \lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$ и $0 < \theta < 1$ и c зависит только от числовых параметров $p, q, \lambda, \nu, \nu_0, \nu_1, \theta$ и размерности n . Проверим соотношение $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda - \nu}{n}$.

Действительно,

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{(1-\theta)(\lambda_0 - \nu_0) + \theta(\lambda_1 - \nu_1)}{n},$$

которое, оценив через (7), получим нужное нам соотношение. Теорема доказана. \square

Работа выполнена при частичной поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН Республики Казахстан. (гранты 1080/ГФ МОН РК, 1412/ГФ МОН РК и 1834/ГФ МОН РК, 0744/ГФ МОН РК).

Список литературы

- 1 Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1938. — Vol. 43. — P. 126–166.
- 2 Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — 3 (3). — P. 11–32.
- 3 Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — 4 (1) (принято к печати).
- 4 Ragusa M.A. Operators in Morrey type spaces and applications // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — 3 (3). — P. 94–109.
- 5 O'Neil R. Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. — 1963. — 30. — P. 129–142.
- 6 Błozinski A.P. On a convolution theorem for $L_{p,q}$ spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — 164. — P. 255–265.
- 7 Kerman R.A. Convolution theorems with weights // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — 280 (1). — P. 207–219.

- 8 Костюченко А.Г., Нурсултанов Е.Д. Об интегральных операторах в L_p -пространствах // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 1999. — 5 (2). — Р. 475–491.
- 9 Степанов В.Д. Некоторые вопросы теории интегральных операторов свертки: Монография. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 227 с.
- 10 Nursultanov E.D., Tikhonov S. Convolution inequalities in Lorentz spaces // *J. Fourier Anal. Appl.* — 2011. — 17. — P. 486–505.
- 11 Буренков В.И., Гулиев В.С., Гулиев Г.В. Необходимые и достаточные условия ограниченности дробного максимального оператора в локальных пространствах типа Морри // *Докл. АН*. — 2006. — 409 (4). — С. 443–447.
- 12 Дарбаева Д.К. Интерполяционная теорема типа Марцинкевича для обобщенных пространств типа Морри // *Математический журнал* (принято к печати).
- 13 Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980. — 264 с.

Е.Д.Нурсултанов, Д.К.Дарбаева

Морри типтес кеңістіктеріндегі орам операторы туралы

Мақалада орам операторының нормасының жоғарыдан бағалаулары Морри типті кеңістіктерінде зерттелді. Морри типті кеңістігі енгізіліп, оның интерполяциялық қасиеттері қарастырды. Юнг-О'Нейл типті теңсіздіктері Морри типті жалпыланған кеңістіктерінде дәлелденді.

Ye.D.Nursultanov, D.K.Darbayeva

On convolution operator in Morrey-type spaces

In this paper we study the upper estimations of norm of the convolution operator in Morrey-type spaces. We introduce the space $M_{p,q}^{\alpha}$, which include classical Morrey spaces, discuss their properties and describe the interpolation properties. We prove the Young-O'Neil-type inequality in generalized Morrey-type spaces.

References

- 1 Morrey C.B. *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations* / *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1938, 43, p. 126–166.
- 2 Burenkov V.I. *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I*, *Eurasian Mathematical Journal*, 2012, 3 (3), p. 11–32.
- 3 Burenkov V.I. *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II*, *Eurasian Mathematical Journal*, 2013, 4 (1) (accepted for publ.).
- 4 Ragusa M.A. *Operators in Morrey type spaces and applications*, *Eurasian Mathematical Journal*, 2012, 3 (3), p. 94–109.
- 5 O'Neil R. *Convolution operators and $L(p,q)$ spaces*, *Duke Math. J.*, 1963, 30, p. 129–142.
- 6 Blozinski A.P. *On a convolution theorem for $L_{p,q}$ spaces* / *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, 164, p. 255–265.
- 7 Kerman R.A. *Convolution theorems with weights* / *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, 280 (1), p. 207–219.
- 8 Kostyuchenko A.G., Nursultanov E.D. *On integral operators in L_p -spaces*, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1999, 5 (2), p. 475–491.
- 9 Stepanov V.D. *Some topics in the theory of integral convolution operators*. Dalnauka, Vladivostok, 2000, 227 p.
- 10 Nursultanov E.D., Tikhonov S. *Convolution inequalities in Lorentz spaces*. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, 17, p. 486–505.
- 11 Burenkov V.I., Guliyev H.V., Guliyev V.S. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces* // *Dokl. Ross. Akad. Nauk. Matematika*, 2006, 409, p. 443–447.
- 12 Darbayeva D.K. *Marcinkiewicz-type interpolation theorem for generalized Morrey-type spaces*. *Mathematical journal* (accepted for publication).
- 13 Bergh J., Löfström J. *Interpolation spaces. An introduction*, Moscow: Mir, 1980, 264 p.