

$\lambda \in R, 0 < p, q \leq \infty$  және  $T = \{Q\} \subset R^n$  -нің локальды бөліктеуі [1] болсын. Локальды Морри кеңістігін Е. Нурсултанов пен Д. Сұраған [1] келесідей анықтады:  $LM_{p,q}^\lambda(T)$  – бұл келесі шартты қанағаттандыратын өлшенетін функциялар кеңістігі:

$$\|f\|_{LM_{p,q}^\lambda(T)} = \left( \sum_{k \in Z} \left( 2^{-k\lambda} \sum_{Q \in T_k = T \cap G_k} \|f\|_{L_p(Q)} \right)^q \right)^{1/q} < \infty$$

Бұл мақалада жалпыланған локальды Морри типті кеңістіктердегі орам операторларының нормалық бағалары зерттеледі. Олардың шектелгендігі үшін жеткілікті шарттар келтіріліп, сондай-ақ сәйкес дуалды кеңістіктер сипатталады.

**Теорема 1.**  $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \lambda \in R, u \in R^n$  нүктесіне сәйкес  $R^n$ -нің  $T(u)$  бөліктеуін [1] алайық, онда

$$\|f\|_{(LM_{p,q}^\lambda(T(u)))'} \|f\|_{LM_{p',q'}^{-\lambda}(T(u))}$$

Біз осы кеңістіктерде Young–O’Neil типті теңсіздіктерді дәлелдейміз.

**Теорема 2.**  $1 \leq p \leq \infty, 0 < \lambda < \frac{n}{p}, 0 \leq \gamma \leq \frac{n}{p}, 0 < \alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{p}, 0 < \tau \leq \infty, u, v \in R^n$  нүктелеріне сәйкес  $T(u), T(v)$  бөліктеулерін алайық. Егер  $f \in LM_{p,\infty}^\gamma(T(u-v))$   $g \in LM_{p',\tau}^{-\alpha}(T(v))$  болса, онда  $f * g \in LM_{p,\tau}^\lambda(T(u))$  және келесі теңсіздік орындалады

$$\|f * g\|_{LM_{p,\tau}^\lambda(T(u))} \leq c \|f\|_{LM_{p,\infty}^\gamma(T(u-v))} \|g\|_{LM_{p',\tau}^{-\alpha}(T(v))}$$

мұндағы  $c$  тұрақтысы тек  $\lambda, \alpha, n, p$  шамаларынан тәуелді, ал  $(f * g)(x) = \int_{R^n} g(y-x) f(y) dy$

Бұл теңсіздік әлсіз Лебег кеңістіктерінен алынған ядролармен әрекеттесетін орам операторы үшін жаңа бағалау береді, Лоренц, Морри кеңістіктері үшін белгілі теоремаларды жалпылайды.

**Алғыс:** Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (АП23488596 гранты) қолдады.

## Әдебиеттер тізімі

- [1] [1] E. D. Nursultanov, D. Suragan. On the convolution operator in Morrey spaces. J. Math. Anal. Appl., 515 (2022), 126357, 20 pages.

## КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМИ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ПРОКОЛОТЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ И СЕКМЕНТОВ

Кангужин Балтабек<sup>1</sup>, Кайырбек Жалгас<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

<sup>1</sup>E-mail: kanguzhin53@gmail.com

<sup>2</sup>E-mail: kaiyrbek.zhalgas@gmail.com

Оператор Лапласа-Бельтрами изучается на стратифицированном множестве, состоящем из двух проколотых окружностей и интервала. Дано полное описание всех корректно поставленных краевых задач для оператора Лапласа-Бельтрами на таком множестве. Во второй части статьи выделен класс самосопряженных корректно поставленных задач для оператора Лапласа-Бельтрами на указанном стратифицированном множестве. Полученные результаты можно считать обобщением известных аналогичных результатов о геометрических графах. В частности, рассматриваемое стратифицированное множество можно интерпретировать как графы с петлями. Результаты исследований асимптотики спектров операторов Штурма-Лиувилля на плоских кривых, гомотопных конечному интервалу, также тесно связаны с результатами настоящей статьи. Поскольку проколота окружность диффеоморфна конечному интервалу, спектральные методы, применяемые к дифференциальным операторам на конечном интервале, могут быть модифицированы для изучения спектральных свойств дифференциальных операторов на проколотой окружности. Основные результаты данной работы получены путем модификации методов, ранее применявшихся при изучении асимптотического поведения собственных значений оператора Штурма-Лиувилля на конечном интервале.

#### **Стратифицированное множество $\Omega$ и функции над $\Omega$ .**

Введем стратифицированное множество  $\Omega$ , состоящее из двух проколотых окружностей  $C_1, C_2$  и интервала  $l = (0, 1)$ , а также двух точек  $A$  и  $B$ . В этом случае  $\Omega$  является связным множеством, роль одномерных страт играют  $C_1, C_2, l$ , а роль нульмерных страт — одноточечные множества  $\{A\}$  и  $\{B\}$ . Приведенных фактов о стратифицированном множестве нам достаточно, более общие сведения о стратифицированных множествах можно найти в работах (1; 2). Согласно работе (3) на множестве  $\mu$  вводится мера  $\Omega$ , а также соответствующие ей функциональные пространства. Согласно указанной работе (4; 5)  $\Omega$  представляется в виде объединения двух непересекающихся частей:  $\Omega_0 = C_1 \cup l \cup C_2$  и  $\partial\Omega_0 = \{A, B\}$ .

**Корректно решаемые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой окружности  $C_1$**  Для удобства предположим, что проколота окружность  $C_1$  задана уравнением

$$C_1 = \{x_1 = (x_1^1, x_1^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : (x_1^2)^2 + (x_1^1 + 1)^2 = 1\}.$$

Ясно, что проколотую окружность  $C_1$  можно определить с помощью одной карты

$$\begin{cases} x_1^1 = \cos t_1 - 1 \\ x_1^2 = \sin t_1 \end{cases}$$

Более того, локальная координата  $t_1$  пробегает интервал  $(0, 2\pi)$ . В  $C_1$  можно определить классы функций и оператор Лапласа-Бельтрами, как это сделано в работе (4). В частности, оператор Лапласа-Бельтрами в этом случае представляет собой оператор двукратного дифференцирования по переменной  $t_1$ , если функция на  $C_1$  представлена как функция на интервале  $(0, 2\pi)$ . Если функцию на  $C_1$  представить в виде функции  $x \in C_1$ , то значение оператора Лапласа-Бельтрами совпадает с двукратной касательной производной. Поскольку оператор Лапласа-Бельтрами определен инвариантно относительно локальных координат, то при решении соответствующих уравнений уравнение можно решать в

производных локальных координатах. Локальные координаты можно выбирать по своему усмотрению, и тогда найденное в выбранных координатах решение должно иметь возможность быть записано в других произвольных локальных координатах.

**Благодарности:** Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (гранты № AP19175972 и № AP19678089).

## Список литературы

- [1] Pham, F. “Introduction to the topological study of Landau singularities”, M.: Mir, (1970).
- [2] Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Borovskikh A.V., Pryadiev V.L., Lazarev K.P., Shabrov S.A. “Differential equations on geometric graphs”, M.: Fizmatlit, (2005).
- [3] Dairbekov, N.S., Penkin, O.M., Sarybekova, L.O. “An analog of the Sobolev inequality on a stratified set”, St. Petersburg Math. J.30:5, (2019).
- [4] Kanguzhin, B.E., Dosmagulova, K.A., Akanbay, E. “On the Laplace-Beltrami operator in stratified sets composed of punctured circles and segments”, Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 125 (1),(2025).

## РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Кошанов Б.Д.<sup>1</sup>, Сматова Г.Д.<sup>2</sup>, Шыныбаева Н.М.<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

<sup>1</sup>E-mail: koshanov@math.kz

<sup>2</sup>E-mail: shynybayeva001@mail.ru

<sup>3</sup>Сағпаев университет, Алматы, Казахстан

<sup>3</sup>E-mail: smatova1977@mail.ru

Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина задачи. Много работ посвящено построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач. Явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре построен различными способами в работах [1-6]. В [7,8] исследованы разрешимость и построены функции Грина для нескольких локальных и нелокальных краевых задач с инволюцией для бигармонического уравнения. Условия разрешимости некоторых вариантов краевых задач для бигармонического уравнения в шаре получены также в [9]. В [10] найдены решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения без использования функции Грина. В [11] приведены функции Грина задач Навье [12] и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре, а в [13] построены функции Грина таких задач для полигармонического уравнения. В [14,15] найдены условия разрешимости некоторых краевых задач для полигармонического уравнения и приведены примеры для бигармонического и тригармонического уравнения. В [16,17] исследованы фредгольмова разрешимость и вычислены формулы