где константа c зависит только от параметров n, λ, q.

Лемма 3. Пусть $u \in \mathbb{R}^n, T(u)$ локальное разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ по точкеu. Пусть $1 \le p < q < \infty, 0 \le \lambda \le \frac{n}{q}$ и $0 < \gamma \le \frac{\lambda q}{p}$ и $\alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{q}, p' = \frac{p}{p-1}$.

Если $f \in LM^{\gamma}_{p,\frac{p}{q}}\big(T(u-v)\big)$и $g \in LM^{-\alpha}_{p',1}\big(T(v)\big)$, то $f * g \in LM^{\lambda}_{q,\infty}\big(T(u)\big)$ и выполняется неравенство

$$\|f * g\|_{LM^{\lambda}_{q,\infty}(T(u))} < c\,\|f\|_{LM^{\gamma}_{p,\frac{p}{q}}(T(u-v))}\|g\|_{LM^{-\alpha}_{p',\infty}(T(v))},$$

где константа c зависит только от параметров n, λ, q.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан. (Грант №AP14870361).

Список использованной литературы

1. Burenkov V.I., Guliyev H.V., GuliyevV.S.: Nessesary and sufficient conditions forboundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces, DokladyRoss. Akad. Nauk. Matematika 409 (2006) 443-447.

ОБ ОДНОЙ СЕКТОРИАЛЬНОЙ ФОРМЕ В L_2

Кошкарова Б.С.[1], Мурат Г.[2], КусаиноваЛ.К.[1]
[1]*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
[2]*НАО «Торайгыров университет», Павлодар, Казахстан*
E-mail: b-koshkarova@yandex.kz

В теории сингулярных дифференциальных операторов одним из методов задания и исследования является метод построения операторов, ассоциированных с полуторалинейными и квадратичными формами.

В работе рассмотрена форма вида

$$q[u,f] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2(x) D_j^2 u\, D_j^2 f + \mathrm{w}(\mathrm{x}) u f \right) dx, \qquad \mathrm{u}, \mathrm{f} \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

В (1) $i = \sqrt{-1}$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(1 \le j \le n)$, $\rho_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $w_0 = Re w > 0, w_1 = Im w$ локально суммируемы в $\mathbb{R}^n$ $(\in L_{2,loc})$, и $|\rho_j(x) - \rho_k(x)| > 0$ в $\mathbb{R}^n$ хотя бы для одной пары $j \ne k$, L_2 – пространство вещественных функций в $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой.

Обозначим через $W = W_2^2(\bar{\rho}, w_0)$ пополнение класса финитных функций $\mathfrak{D} = \mathrm{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ по норме $\|u\|_W = \sqrt{q_0[u,u]}$. Пусть $P(x; \bar{a}, h) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y_j - x_j| < \frac{a_j h^{\frac{1}{2}}}{2},\ 1 \le j \le n \right\}, \bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \big(a_j > 0, 1 \le j \le n\big)$, $h > 0$. Через $\overline{\mathrm{E}}$, $|\mathrm{E}|$, $|E|_v$ будут обозначаться соответственно замыкание, мера Лебега.

Положим $(0 < \delta < 1)$ $S_{(\delta)}(x, h;\ \bar{a}, w_0) = \inf\limits_{\{\mathrm{e}\}_\delta} |P(x; \bar{a}, h) \backslash e|_{w_0}$,где inf берется по всем компактам $e \subset \bar{P}(x; \bar{a}, h)$ меры $|e| \le \delta\, |P(x; \bar{a}, h)|$.

Потребуем, чтобы $w_0 = Re w$было невырожденно в следующем смысле:

$$S_{(\delta)}(x, h;\ \bar{a}, w_0) > 0 \tag{2}$$

и не убывает по $h > 0$, δ –некоторая постоянная из (0,1).

Введем функцию

$$h(x) = h(x; \bar{\rho}, w_0) = \sup\{h > 0 : M_{(\delta)}(x, h; \bar{\rho}, w_0) \le 1\},$$

где

$$M_{(\delta)}(x, h; \bar{\rho}, w_0) = h\big(\dot{S}_{(\delta)}(x, h;\ \bar{\rho}, w_0) |P(x; \bar{\rho}(x), h)|^{-1}\big)^{1/2}.$$

Положим $\Pi\bar{\rho}(x) = \prod_{j=1}^{n} \rho_j(x)$. Поскольку

$$\lim_{h \to 0+} M_{(\delta)}(x, h; \bar{\rho}, w_0) = \big(\Pi\bar{\rho}(x)\big)^{-1/2} \lim_{h \to 0+} h^{1-n/4} \big[S_{(\delta)}(x, h;\ \bar{\rho}, w_0)\big]^{1/2} = 0,$$

то $h(x) > 0$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $0 < h(x) = h_{(\delta)}(x; \bar{\rho}, w_0) < \infty$, если $n < 4 (n > 1)$либо

$$\inf_{\{e\}_\delta} |P(x;\bar{a},h)\backslash e|_{w_0} \geq \gamma(x)\,|P(x;\bar{\rho}(x),h)|, \quad \gamma(x) > 0$$

при $n \geq 4$.

Параллелепипеды $P(x) = P(x;\bar{\rho}(x),h(x))$ будем называть характеристическими. В случае $n < 4$ имеет место оценка (см. [1], §.3.3)

$$\|u;L_2(P(x),v)\| \leq c\mathcal{K}(x;\bar{\rho},v)\left(\sum_{j=1}^{n}\rho_j(x)\left\|D_j^2u;L_2P(x)\right\| + \left(\int_{P(x)} w_0(x)|u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

где

$$\mathcal{K}(x;\bar{\rho},v) = h(x)^{1-n/4}\big(\Pi\bar{\rho}(x)\big)^{-1/2}|P(x)|_v^{1/2}.$$

Здесь и далее $c, c_0, c_1, \ldots -$ положительные постоянные, значения которых определяются только числовыми параметрами $n, \delta,$ и т.д.

Мы будем рассматривать семейство $\{P(x;\bar{a}),\ x \in E\}$, где $\bar{a}(x) = \big(a_1(x),\ldots,a_n(x)\big)$ −положительная ограниченная вектор-функция в E с коэффициентами $a_j(x)$ $(1 \leq j \leq n)$, $P(x;\bar{a}) = P(x;\bar{a},1)$. Будем говорить, что параллелепипеды $P(x;\bar{a})$ и $P(y;\bar{a})$сравнимы, если выполнено одно из условий:

1) $\varkappa^{-1} \leq a_j(y)/a_j(x) \leq \varkappa (1 \leq j \leq n)$,

2) $a_j(y) \leq a_j(x) (1 \leq j \leq n)$,

3) $a_j(y) \geq a_j(x) (1 \leq j \leq n)$.

При этом $\varkappa > 1$ постоянная. Запись: $P(x;\bar{a}) \prec P(y;\bar{a})$.

Получены следующие результаты:

Теорема 1. Пусть n<4,w_0 удовлетворяет условию (2) при некотором $\delta \in (0,1)$, и пусть

$$\varkappa^{-1} \leq \rho_j(y)/\rho_j(x) \leq \varkappa(1 \leq j \leq n), \text{если } y \in P(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Если найдется такое K, $0 < K < \infty$, что

$$\int_{P(x)} |w_1|dy \leq K \inf_{\{e\}_\delta} \int_{P(x)\backslash e} w_0 dy \; (x \in \mathbb{R}^n), \qquad (3)$$

то форма

$$\dot{q}[u,f] = q[u,f], \quad u,f \in \mathcal{D},$$

секторильна.

При доказательстве теоремы 1 применена теорема о существовании конечно-кратного и конечно разделимого покрытия ограниченного множество $E \subset \mathbb{R}^n$ семейством параллелепипедов $\{P^{k}, k \in \Lambda\}$ $(\Lambda \subset \mathbb{N})$, сравнимых, если только $P^{k} \cap P^m$ не пусто (см. [1],с. 3).

Замечание. В (3) наилучшая постоянная

$$K \sim \left(\sup_x K(x;\bar{\rho},w_1)\right)^2.$$

Ниже запись

$$\|\cdot\|_X - \lim f_k = f$$

будет означать, что последовательность $f_k \in X$ сходится к fпо норме $\|\cdot\|_X$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, и пусть к тому же:

1) $\sup_x h(x) = \sup h_{(\delta)}(x;\bar{\rho},w_0) = K_0 < \infty$;

2) $\rho_j, \rho_j^{-1} \in L_{\infty,loc}(1 \leq j \leq n)$.

Справедливы утверждения:

a) $W \subset L_2$, а именно, всякая фундаментальная по норме $\|\cdot\|_W$ последовательность $\{u_k\} \subset \mathfrak{D}(= C_0^\infty)$имеет

$$\|\cdot\|_2 - \lim\|u_k\| = u. \qquad (4)$$

b) Функция u в (4) имеет обобщенные производные $D_j^2u \in L_{2,loc}(1 \leq j \leq n)$, конечную норму $\|u\|_W$и $\|u - u_k\|_W \to 0$ (при$k \to \infty$).

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда:

a) форма $\dot{q}$в (4) допускает замкнутое секториальное расширение q, определенное равенством

$$q[u,f] = \lim_{k\to\infty} q_0[u_k,f_k]$$

на паре $u = \|\cdot\|_W - \lim u_k, \quad f = \|\cdot\|_W - \lim f_k$.

b) Пространство $W = D(q)$ (см. [2], VI,§.1.4).

Список использованной литературы

1. Кусаинова Л.К. Теоремы вложения и интерполяции весовых пространств Соболева // Дисс. на соискание докт. физ.-матем. наук. – Алматы: Ин-т матем. МОН РК, 1999.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. – 740 с.
3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. – 480 с.

ОБ УСЛОВИЯХ КОМПАКТНОСТИ КОММУТАТОРА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ЛОКАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ.

Матин Д.Т.

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

E-mail:d.matin@mail.ru

В данной работе получены достаточные условия компактности коммутатора для потенциала Рисса *[b,α]* в этих пространствах.

Определение 1. Пусть $0 < p,\theta \le \infty$, и пусть w неотрицательная, измеримая функция в $(0,\infty)$. Мы обозначим через $LM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ локальное пространство типа Морри. Это пространство всех функции $f \in L_p^{loc}\left(R^n\right)$ с конечной квазинормой:

$$\|f\|_{LM_{p\theta}^{w(\cdot)}} \equiv \|f\|_{LM_{p\theta}^{w(\cdot)}\left(R^n\right)} = \left\| w(r) \|f\|_{L_p\left(B(0,r)\right)} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

Обозначим через Ω_θ множество всех функций, которые являются неотрицательными, измеримыми на $(0,\infty)$, не эквивалентные 0 и такие, что для некоторого $t > 0$

$$\|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Пространство $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ нетривиально, то есть состоит не только из функций, эквивалентных 0 на R^n, тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_\theta$.

В работе приводятся достаточные условия компактности коммутатора для потенциала Рисса $[b, I_\alpha]$ в обобщенных пространствах Морри M_p^w. Результаты этого подраздела были опубликованы в [47, 48, 49].

Потенциал Рисса I_α порядка $\alpha (0 < \alpha < n)$ играет важную роль в гармоническом анализе и в теории потенциалов, и определяется следующим образом

$$I_\alpha f(x) = C_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \text{где } C_{n,\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Для функции $b \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ через M_b обозначим мультипликационный оператор $M_b f = bf$, где f - измеримая функция. Тогда коммутатор для потенциала Рисса I_α и оператора M_b определяется равенством

$$[b, I_\alpha] = M_b I_\alpha - I_\alpha M_b = C_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left[b(x) - b(y)\right] f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Потенциалам Рисса I_α посвящены работы [50], [51].

Говорят, что функция $b(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $BMO(\mathbb{R}^n)$, если