УДК 517.956.3

А.Н.Есбаев, А.К.Жанболова, С.Н.Петерс

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: snpeters@mail.ru)

О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения

В статье рассмотрены взаимосопряженные задачи для нагруженного уравнения теплопроводности, где нагруженное слагаемое представляет собой производную первого порядка от неизвестной функции в фиксированной точке. Известно, что для нагруженных уравнений не всегда можно применять методы исследования обычных ненагруженных уравнений. К подобного рода нагруженным уравнениям сводятся задачи оптимального управления, досрочного прогнозирования и регулирования уровня почвенной влаги. Также нагруженные уравнения возникают при численном решении интегральных и дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, уравнение теплопроводности, сопряженная задача, уравнение параболического типа, преобразование Лапласа.

Нагруженные дифференциальные уравнения находят многочисленные применения в задачах долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги. Нагруженные уравнения возникают также при исследовании нелинейных уравнений переноса частиц, задач оптимального управления, при численном решении интегродифференциальных уравнений, при эквивалентом преобразовании нелокальных краевых задач [1–4]. Классические вопросы, возникающие в теории краевых задач для уравнений в частных производных, остаются такими же как для краевых задач для нагруженных уравнений, но наличие нагруженного оператора не всегда позволяет напрямую применять методы исследований, хорошо развитые при исследованиях обычных уравнений.

Рассмотрим в области $Q=\{(x,t): x>0, t>0\}$ следующую граничную задачу для нагруженного уравнения теплопроводности:

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = f(x,t); \\ u(x,0)=0, u(0,t)=0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр; $f(x,t)\in C(Q)$ — заданная функция. Обращая дифференциальную часть в граничной задаче (1), получим следующее соотношение:

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot u_\eta(\eta,\tau)\Big|_{\eta=1} d\tau + \int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \tag{2}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right\} \text{— функция Грина.}$$

Теперь, дифференцируя (2) по x и полагая $x=1$, получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$K_\lambda \mu = (I-\lambda K_1) \equiv \mu(t) - \lambda\int_0^t K_1(t-\tau)\mu(\tau)\,d\tau = f_1(t), \tag{3}$$

где

$$\mu(t) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1},\ f_1(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right]_{x=1};$$

$$K_1(t-\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left[erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right]_{x=1} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2}dz\right]_{x=1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \Bigg|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4(t-\tau)}}. \tag{4}$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3), переходим в пространство образов:

$$\hat{\mu}(p)\left[1-\lambda\frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right] - = \hat{f}_1(p),$$

или

$$\hat{\mu}(p) = \hat{f}_1(p) + \frac{\lambda\frac{e^{-x_0\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}}{1-\lambda\frac{e^{-x_0\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}}\hat{f}_1(p). \tag{5}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим решение интегрального уравнения:

$$\mu(t) = f_1(t) + \int_0^t r(t-\tau) f_1(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

где

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \frac{\lambda^n \tau_1^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{n}{2\sqrt{\pi}(t-\tau_1)^{3/2}} e^{-n^2\frac{1}{4(t-\tau_1)}} d\tau_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\lambda^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^t \frac{\tau_1^{\frac{n}{2}-1}}{(t-\tau_1)^{3/2}} \cdot e^{-n^2\frac{1}{4(t-\tau_1)}} d\tau_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^t \tau_1^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{2(t-\tau_1)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{n^2}{4(t-\tau_1)}} d\tau_1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \lambda^n \cdot n \cdot t^{\frac{n}{2}-\frac{3}{4}} \cdot e^{-\frac{n^2}{8t}} \cdot W_{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{n^2}{4t}\right), \tag{7}$$

здесь $W_{\frac{3}{4}-\frac{n}{2},-\frac{1}{4}}\left(\frac{n^2}{4t}\right)$ — функция Уиттекера.

Окончательно решение интегрального уравнения (3) можно записать в следующем виде:

$$\mu(t) = f_1(t) + \int_0^t \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\lambda^n}{n} \cdot (t-\tau)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{4}} \cdot e^{-\frac{n^2}{8(t-\tau)}} \cdot W_{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{n^2}{4(t-\tau)}\right)\right\} f_1(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Тогда решение исходной задачи (1) будет иметь вид:

$$u(x,t) = \lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^{\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \tag{9}$$

где $\mu(t)$ и $f_1(t)$ определяются из соотношений (8) и (4) соответственно.

Для полного исследования поставленной задачи (1) нужно рассмотреть её сопряженную, которая ставится следующим образом:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} - \overline{\lambda} \cdot \delta^{/}(x-t) \otimes \displaystyle\int_0^{\infty} \upsilon(\xi,t) d\xi = g(x,t); \\ \upsilon(x,\infty) = 0, \upsilon(0,t) = \upsilon(\infty,t) = \upsilon_x(\infty,t) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Обращая дифференциальную часть уравнения (10) так же, как и уравнения (1), получим следующее уравнение:

$$K_{\lambda}^{*} v \equiv v(t) - \overline{\lambda}\int_t^{\infty} K_1(\tau - t) v(\tau)\, d\tau = g_1(t), \tag{11}$$

где

$$\nu(t)=\bar{\lambda}\int_t^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-t)}}\cdot e^{-\frac{1}{4(\tau-t)}}\cdot\nu(\tau)\,d\tau+g_1(t); \tag{12}$$

$$g_1(t)=t^{-\frac{1}{2}}\cdot\int_t^{\infty}\int_0^{\infty}erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right)\cdot g(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

$\nu(t)=0$ будет решением этого уравнения. Но надо отметить, что есть и ненулевые решения. Так как уравнение (11) — уравнение с разностным ядром, к нему можно применить преобразование Лапласа. Вместе с тем учитываем, что справедливо следующее равенство [5]:

$$L\left\{\int_t^{\infty}K(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right\}=\hat{K}(-p)\cdot\hat{\varphi}_L(p),$$

где

$$\hat{K}(-p)=\int_0^{\infty}K(-t)e^{pt}dt.$$

Теперь, если применить к однородному уравнению (11) преобразование Лапласа, получим следующее трансцендентное уравнение

$$\hat{\varphi}(p)\cdot\left[1-\bar{\lambda}\cdot\hat{K}(-p)\right]=0.$$

Если предположить, что $\hat{\varphi}_L(p)\neq 0,$ то должно выполняться следующее равенство:

$$1-\bar{\lambda}\cdot\hat{K}(-p)=0. \tag{13}$$

В нашем случае

$$\hat{K}(-p)=\frac{e^{\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}}.$$

Тогда нам надо найти корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\hat{A}^*(p)=1-\lambda\cdot\frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}}=0. \tag{14}$$

Корни уравнения (14) в явном виде найти нельзя, можно найти только приближенно [6]. Для этого, произведя замену $\sqrt{-p}=z,$ уравнение (14) запишем в следующем виде:

$$e^z=-\frac{1}{\lambda}z. \tag{15}$$

Поэтому, рассматривая это уравнение как функцию $\lambda=\lambda(p),$ т.е. как конформное отображение, найдем во что отображается (на комплексной плоскости λ) область определения переменной $p.$ По условию $\mathrm{Re}(-p)>0,$ т.е. $-\frac{\pi}{2}<\arg(-p)<\frac{\pi}{2},$ тогда $-\frac{\pi}{4}<\arg\sqrt{-p}<\frac{\pi}{4}.$ Пусть $z=\sqrt{-p}=x+iy,$ значит граница области определения переменной $-p$ — это линии $y=\pm x.$ По закону соответствия границ достаточно найти образы этих линий. Получим следующее уравнение:

$$\lambda=z\cdot e^z$$

$$|\lambda|=|z|\cdot\left|e^z\right|;$$

$$\begin{cases}|\lambda|=\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^x;\\ \arg\lambda=arctg\,\dfrac{y}{x}+(y-2k\pi),\end{cases}$$

где $k\in Z.$

1) Рассмотрим случай $y = x$:

$$\begin{cases} |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^x = \sqrt{2} \cdot x \cdot e^x; \\ \arg\lambda = \dfrac{\pi}{4} + x - 2k\pi. \end{cases}$$

Тогда из этого уравнения $x = \arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $|\lambda| = \sqrt{2}\left(\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cdot e^{\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$, где $\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi > 0$. В таком случае получаем уравнение $|\lambda| = \sqrt{2} \cdot \left|\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right| \cdot e^{\left|\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right|}$.

2) Теперь рассмотрим случай $y = -x$:

$$\begin{cases} |\lambda| = \sqrt{2} \cdot x \cdot e^x; \\ \arg\lambda = -\dfrac{\pi}{4} - x \pm 2k\pi. \end{cases}$$

Тогда из этой системы уравнений выходит, что $x = -\arg\lambda - \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi$, $|\lambda| = \sqrt{2}\left(-\arg\lambda - \frac{\pi}{4} - 2k\pi\right) \cdot e^{-\arg\lambda - \frac{\pi}{4} - 2k\pi}$. Так как $-\arg\lambda - \frac{\pi}{4} - 2k\pi > 0$, это уравнение можно записать как

$$|\lambda| = \sqrt{2}\left(\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cdot e^{\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi}.$$

Объединяя оба случая, можно записать эти уравнения в следующем виде:

$$|\lambda| = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} \left|\arg\lambda - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right| \cdot e^{|\arg\lambda + 2k\pi|}. \qquad (16)$$

Линии, определяемые уравнением (16), разбивают комплексную плоскость параметра λ на не пересекающиеся области D_m, $m = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 1 и 2).

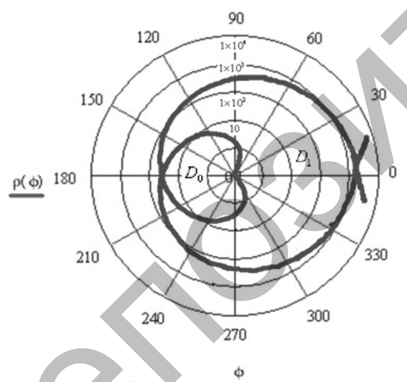

Рисунок 1. Плоскость спектрального параметра λ (увеличенный масштаб)

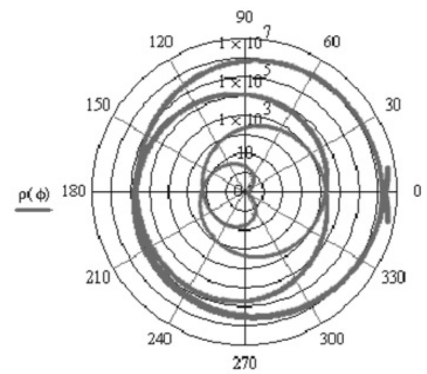

Рисунок 2. Плоскость спектрального параметра λ (уменьшенный масштаб)

Внешние границы ∂D_m области D обозначаем соответственно Γ_m, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Замечание 1. Заметим, что кроме области D_0, которая имеет только внешнюю границу $\Gamma_0 = \partial D_0$, каждая из областей D_m имеет границу ∂D_m, состоящую из внешней Γ_m и внутренней Γ_{m-1} частей:

$$\partial D_m = \Gamma_{m-1} \cup \Gamma_m.$$

Причем внешняя Γ_m и внутренняя Γ_{m-1} части границы ∂D_m области D_m имеют одну общую точку, лежащую на действительной оси комплексной плоскости параметра λ.

Таким образом, получаем, что $\bar{\lambda} \in \Gamma_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots.$, тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна точка $\tilde{p}$, для которой выполнено равенство $\hat{A}^*\left(p, \bar{\lambda}\right) = 0.$

Для любого λ функция $\hat{A}^*\left(p, \bar{\lambda}\right)$ в левой полуплоскости может иметь только конечное число нулей p_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ (их число определяется значением $\left|\bar{\lambda}\right|$). Если $\bar{\lambda} \in D_m$, тогда число корней равно только m.

Если $\bar{\lambda} \in D_m$, то решение однородного уравнения

$$K_{\lambda}^{*} v \equiv v(t) - \bar{\lambda}\int_{t}^{\infty} K_1(\tau - t) v(\tau)\, d\tau = 0 \tag{17}$$

будет иметь вид:

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot e^{p_k t}, \tag{18}$$

где c_k — произвольные постоянные.

Теперь найдем какое-либо частное решение неоднородного уравнения (14). Предположим, что преобразование Лапласа функции $g(t)$ аналитично в полосе $-\varepsilon < \operatorname{Re} p < \varepsilon.$ В таком случае из уравнения (16) при $\forall \bar{\lambda} \notin \Gamma_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots.)$ получим

$$\hat{v}(p) = \hat{g}(p) + \bar{\lambda}\frac{\dfrac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}}}{1 - \bar{\lambda}\dfrac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p}}} \cdot \hat{g}(p), \tag{19}$$

тогда

$$\hat{v}(p) = \hat{g}(p) + \bar{\lambda}\frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda}e^{-\sqrt{-p}}} \cdot \hat{g}(p). \tag{20}$$

При переходе в этих соотношениях к оригиналам получаем:

$$v(t) = g(t) + \bar{\lambda}\int_{t}^{\infty} r^*(t - \tau) g(\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

где

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{-p}}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda}e^{-\sqrt{-p}}} \exp(\theta p)\, dp, \ \theta < 0. \tag{22}$$

Если корни уравнения $\sqrt{-p} - \bar{\lambda}e^{-\sqrt{-p}} = 0$ находятся на мнимой оси, то интегрирование берем по контуру, чтобы они обходили точки по левому краю.

В формуле (22) находим вычет подынтегральной функции по правой разрезанной полуплоскости.

Теперь, используя лемму Жордана, найдем резольвенту $r^*(\theta)$:

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{-p} + p\theta}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda}e^{-\sqrt{-p}}}\, dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{I} + \frac{1}{2\pi i}\int_{II} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} + \sum_{k=m+1}^{\infty} res\left[\frac{e^{-\sqrt{-p} + p\theta}}{\sqrt{-p} - \bar{\lambda}e^{-\sqrt{-p}}}\right]. \tag{23}$$

На «берегу» I имеем (рис. 3):

$$p = x \cdot e^{-i0} = x, \ \sqrt{-p} = \sqrt{-x} = i\sqrt{x}.$$

На «берегу» II:

$$p = x \cdot e^{2\pi i} = x, \ \sqrt{-p} = -i\sqrt{x}.$$

Тогда

$$\int_{I} + \int_{II} = \int_{0}^{\infty}\left[\frac{e^{i\sqrt{x}}}{-i\sqrt{x} - \bar{\lambda}e^{i\sqrt{x}}} - \frac{e^{-i\sqrt{x}}}{i\sqrt{x} - \bar{\lambda}e^{-i\sqrt{x}}}\right] \cdot e^{x\theta} dx = -\int_{0}^{\infty} \frac{2i\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{x + 2\lambda\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \lambda^2} \cdot e^{x\theta} dx, \ \theta < 0.$$

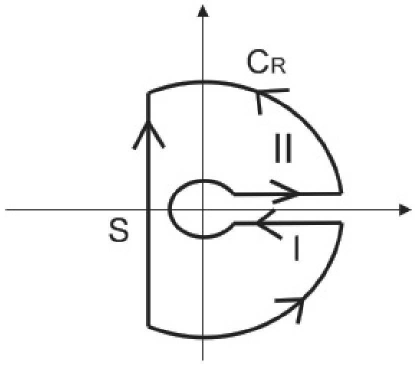

Рисунок 3. Контур интегрирования

Из этого следует

$$r^*\left(t\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2i\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot e^{x\theta}}{x+2\lambda\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}+\lambda^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot e^{x\theta}}{x+2\lambda\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}+\lambda^2}dx,\ \theta<0.$$

Делаем следующие замены:

$$\sqrt{x}=\xi,\ x=\xi^2,\ dx=2\xi d\xi.$$

Тогда

$$r^*\left(\theta\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi^2\cdot e^{\theta\xi^2}\cdot\cos\xi}{\xi^2+2\lambda\xi\cdot\sin\xi+\lambda^2}d\xi,\ \theta<0. \qquad (24)$$

Таким образом, когда $\left|\overline{\lambda}\right|\in D_m$ общее решение интегрального уравнения (21) будет иметь вид:

$$v\left(t\right)=g\left(t\right)+\overline{\lambda}\int_t^\infty r^*\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau+\sum_{k=1}^m c_k\cdot e^{p_k t}. \qquad (25)$$

Если $\left|\lambda\right|\in D_0$, то интегральное уравнение (11) имеет единственное решение:

$$v\left(t\right)=g\left(t\right)+\overline{\lambda}\int_t^\infty r^*\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau.$$

Для того чтобы решение $v\left(t\right)$, определяемое формулой (25), было суммируемым достаточно, чтобы функция $r^*\left(t-\tau\right)$ была ограничена для любых $0<t\le\tau<\infty$, так как функция $g_1\left(t\right)+\sum_{k=1}^m c_k\cdot e^{p_k t}$ является суммируемой функцией переменной t. Очевидно, что функция $r^*\left(t-\tau\right)$ будет ограниченной. Таким образом доказана:

Теорема. Множество $C\setminus D_0$ состоит из характеристических чисел K^* (11). Причем если $\lambda\in D_m$, $m=0,1,2,...$, то $\partial imKer\left(K^*\right)=m$; и соответствующие собственные функции имеют вид:

$$v_{\lambda k}\left(t\right)=\exp\left(p_k t\right),\ k=1,...,m,$$

где числа p_k определяются из равенств (14).

References

1 *Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I.* The loaded equations as indignations of the differential equations. — Almaty: Gylym, 2010.

2 *Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I.* About a boundary task for the spectral loaded operator of heat conductivity. Siberian mathematical magazine. — 2011. — T. 52. — № 1. — P. 3–14.

3 *Saldatov A.R., Ramazanov M.I., Shaldakova B.A.* About regional tasks for the spectral loaded parabolic operators. I // Messenger HAG. Mathematics of a series. — 2011. — № 2 (62). — P. 85–92.

4 *Saldatov A.R., Ramazanov M.I., Shaldakova B.A.* About regional tasks for the spectral loaded parabolic operators. II // Messenger HAG. Mathematics of a series. — 2011. — № 3 (62). — P. 88–95.

5 *Krasnov M.L.* Integrated equations. — Moscow: Science, 1975. — P. 304.

6 *Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I.* Lectures on the theory of functions of the complex variable. — Moscow: Science, 1982. — P. 384, 385.

А.Н.Есбаев, А.К.Жанболова, С.Н.Петерс

Әлсіз жүктелген параболалық теңдеу үшін берілген бірінші шеттік есеп туралы

Мақалада жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін өзара түйіндес есептер қарастырылған, мұндағы жүктелген қосылғыш белгісіз функцияның орнықтырылған нүктедегі бірінші ретті туындысы болып табылады. Қарапайым жүктелмеген теңдеулерге қолданылатын зерттеу әдістерін жүктелген теңдеулерге әр уақытта қолданыла бермейтіндігі белгілі. Осындай жүктеулі теңдеулерге тиімді басқару есептері, алдын ала болжау және жер ылғалдылығының деңгейін реттеу есептері келтірілді. Сонымен қоса жүктелген теңдеулер интегралдық және дифференциалдық теңдеулерін сандық есептеуде пайда болды.

A.N.Esbayev, A.K.Zhanbolova, S.N.Peters

About the first regional task for poorly — the loaded parabolic equation

In work mutually conjugate tasks for the loaded equation of heat conductivity where the loaded composed represents a derivative of the first order from unknown function in the fixed point are considered. It is known that not always it is possible to apply methods of research of the usual not loaded equations to the loaded equations. To this sort of loaded equations problems of optimum control, early forecasting and regulation of level of soil moisture are reduced. Also loaded equations arise at the numerical solution of the integrated and differential equations.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: modth1705@mail.ru)

Δ-йонсоновские теории

В статье исследованы теоретико-модельные свойства нового класса теорий. В этом классе проведена работа по описанию счетно-категоричных и несчетно-категоричных теорий при соответствующих дополнительных условиях. Рассматриваемый класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в том смысле, что вместо продолжений рассматриваются погружения.

Ключевые слова: язык первого порядка, позитивно аксиоматизируемая теория, йонсоновская теория, категоричный модельный компаньон.

Категоричные Δ-йонсоновские теории. Теперь мы хотим определить понятие Δ-йонсоновских теорий (Δ-*J*). В том случае, если при некотором фиксированном Δ, в определении рассматриваемой $\Delta - PJ$ теории [1] заменить все Δ-продолжения на Δ-погружения, то мы получим определение Δ-йонсоновских теорий (Δ-*J*). Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличие от (Δ-*PJ*) теорий, которые могут быть вообще говоря и нейонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. На-