УДК 517.51

Об одной задаче с начальными данными для волнового уравнения

About one problem with the initial conditions for the wave equation

Есенбаева Г.А.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: esenbaevagulsima@mail.ru)

Мақалада берілген бастапқы шарттарымен бір толқынды теңдеу үшін есеп қарастырылады. Ол есеп екі тәсілмен зерттеледі: бірінші жағдайда есептің аналитикалық шешімі Риман функциясының көмегімен құрылған, ал екіншіде — Лапластың интегралдық түрлендіруін қолдану арқылы алынған. Екі әдісті қолдану барысында кездескен қиыншылықтарға қарамастан, тиімді екендігі дәлелденген.

In the given article one problem with the initial conditions for the wave equation has been considered. The study problem has been investigated in two difference ways. In the first case the analytical solution of this problem with the initial conditions for the wave equation has been built by means of the Remain function. In the second case the analytical solution of the more common problem for this wave equation has been obtained with the application of integral transformation of Laplace. The conclusion has been made that use of this methods is effective and convenient despite of some disadvantages.

Рассмотрим задачу с начальными данными для линейного уравнения гиперболического типа с постоянными коэффициентами [1]:

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0,\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = g(x),\ -\infty < x < \infty.$$

Подстановка

$$U = ue^{\lambda x + \mu\cdot y} \tag{2}$$

приводит исходное уравнение (1) к виду

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1U = 0,\ c_1 = \frac{1}{4}\left(4c^2 - a^2 - b^2\right),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$U(x,0) = \varphi(x)e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{4}$$

$$U_y(x,0) = \left(g(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)\right)\cdot e^{\frac{a}{2}x} = g_1(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{5}$$

если только выбрать параметры λ и μ так, чтобы коэффициенты при первых производных в исходном уравнении (1) равнялись нулю. В данном случае

$$\lambda = \frac{a}{2},\ \mu = -\frac{b}{2}.$$

Определение функции $U(x,y)$ по начальным данным и уравнению (3) сводится к построению функции Римана $v(x,y,\xi,\eta)$ [2].

Уравнение для нахождения v в данном случае принимает вид [2]

$$v'' + \frac{1}{z}v' + c_1v = 0$$

при условии $v(0)=1.$ Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка [3]

$$v(z)=J_0\left(\sqrt{c_1 z}\right)$$

или

$$v(x,y,\xi,\eta)=J_0\left(\sqrt{c_1\left[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2\right]}\right).$$

Пользуясь теперь для нахождения $U(x,y)$ формулой, содержащей функцию Римана [2], и учитывая начальные условия (4), (5), находим:

$$U(x,y)=\frac{\varphi_1(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x=y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)g_1(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\,y\int\limits_{x-y}^{x=y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\varphi_1(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}.$$

Откуда в силу (2), (4), (5) получаем интегральную формулу

$$u(x,y)=\frac{\varphi(x-y)\cdot e^{-\frac{a-b}{2}y}+\varphi(x+y)\cdot e^{-\frac{a+b}{2}y}}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left\{\frac{b}{2}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)-\sqrt{c_1}\,y\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\right\}\cdot e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int\limits_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}g(\xi)d\xi, \qquad (6)$$

дающую решение поставленной исходной задачи [1].

Рассмотрим частный случай $a=0,\, b=0,$ при этом c переобозначим через $\tilde{c},$ т.е. рассмотрим уравнение

$$u_{xx}-u_{yy}+\tilde{c}u=0. \qquad (7)$$

Из формулы (6) сразу получаем

$$u(x,y)=\frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{\tilde{c}}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)g(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\tilde{c}}\,y\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{J_1(\sqrt{\tilde{c}}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\varphi(\xi)d\xi. \qquad (8)$$

Полагая здесь $\tilde{c}=0$ и $y=at,$ приходим к формуле Даламбера.

Произведем в уравнении (7) замену $y=at$ и получим волновое уравнение

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u,\ \text{где}\ \tilde{c}a^2=c^2, \qquad (9)$$

решение которого при заданных начальных условиях определяется формулой (8) при надлежащих изменениях, т.е. учитывая указанную выше замену.

Исследование задачи с начальными данными для уравнения (9) можно проводить и по иному пути, который является несколько сложнее в вычислительном плане, но намного легче в аналитическом восприятии.

Рассмотрим следующую, более общую задачу для волнового уравнения (9) с заданными начальными условиями

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u+f(x,t),\ -\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=g(x),\ -\infty<x<\infty.$$

Применяя преобразование Лапласа к исходной задаче [4]

$$U_p(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\cdot e^{-ipx}dx,$$

получим дифференциальную задачу в изображениях:

$$U_p''(t)+(a^2p^2-c^2)U_p(t)=F_p(t),$$

$$U_p(0)=\Phi_p,\ U_p'(0)=G_p,$$

где $F_p(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\cdot e^{-ipx}dx,\ \Phi_p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot e^{-ipx}dx,\ G_p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot e^{-ipx}dx.$

Введем обозначение $s=\sqrt{a^2p^2-c^2}$ и найдем общее решение дифференциального уравнения задачи в изображениях $U_p(t)=C_1(p,t)\cos st+C_2(p,t)\sin st$, где

$$\begin{cases} C_1(p,t)=-\frac{1}{s}\int\limits_0^t F_p(\tau)\sin s\tau\cdot d\tau+C_1(p),\\ C_2(p,t)=\frac{1}{s}\int\limits_0^t F_p(\tau)\cos s\tau\cdot d\tau+C_2(p).\end{cases}$$

Тогда

$$U_p(t)=C_1(p)\cos st+C_2(p)\sin st+\frac{1}{s}\int\limits_0^t F_p(\tau)\sin s(t-\tau)d\tau,$$

и с учетом начальных условий решение задачи в изображениях примет вид

$$U_p(t)=\Phi_p\cos st+\frac{1}{s}G_p\sin st+\frac{1}{s}\int\limits_0^t F_p(\tau)\sin s(t-\tau)d\tau,$$

$$U_p(t)=\Phi_p\cos\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t+G_p\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}\int\limits_0^t F_p(\tau)\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,(t-\tau)d\tau.$$

Для нахождения оригинала используем обратное преобразование Лапласа [4]:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}U_p(t)\cdot e^{ipx}dp,$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_p\cos\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t\cdot e^{ipx}dp+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_p\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ipx}dp+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}\int\limits_0^t F_p(\tau)\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,(t-\tau)d\tau\right)\cdot e^{ipx}dp,$$

$$u(x,t)=I_1+I_2++I_3,$$

$$I_1+I_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_p\cos\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t\cdot e^{ipx}dp+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_p\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ipx}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{-ip\xi}d\xi\right)\cos\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t\cdot e^{ipx}dp+\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{-ip\xi}d\xi\right)_p\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ipx}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\cos\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t\cdot e^{ip(x-\xi)}d\xi+\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ip(x-\xi)}d\xi=$$

$$=u_1(x,t)+u_2(x,t).$$

Известно [5], что

$$\frac{\sin r}{r}=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\pi}J_0(r\sin\psi\sin\theta)\cdot e^{ir\cos\psi\cos\theta}\sin\theta\cdot d\theta, \tag{10}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Произведем в соотношении (1) замену:

$$r\cos\psi=-apt,\ r\sin\psi=ict,\ r^2=t^2(a^2p^2-c^2),\ \cos\theta=\frac{\beta}{at},\ \sin\theta=\sqrt{1-\frac{\beta^2}{a^2t^2}},\ \sin\theta\cdot d\theta=-\frac{1}{at}d\beta,$$

тогда (10) с учетом того, что $J_0(iz)=I_0(z)$ [5], где $I_0(z)$ — «видоизмененная» функция Бесселя нулевого порядка, примет вид

$$\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2t}}{\sqrt{a^2p^2-c^2t}}=\frac{1}{2at}\int_{-at}^{at}J_0\left(ict\sqrt{1-\frac{\beta^2}{a^2t^2}}\right)\cdot e^{-ip\beta}d\beta=\frac{1}{2at}\int_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)\cdot e^{-ip\beta}d\beta,$$

$$\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2t}}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)\cdot e^{-ip\beta}d\beta.$$

Следовательно,

$$u_2(x,t)=\frac{1}{4\pi a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\left(\int_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)\cdot e^{-ip\beta}d\beta\right)\cdot e^{ip(x-\xi)}d\xi=$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)d\xi\int_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)\cdot e^{ip(x-\xi-\beta)}d\beta. \tag{11}$$

Положим

$$H(\beta)=\begin{cases}0, & \left|\frac{\beta}{a}\right|>|t|,\\ I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right), & \left|\frac{\beta}{a}\right|<|t|.\end{cases} \tag{12}$$

По интегральной формуле

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{ip(x-\xi)}d\xi$$

получим

$$H(z)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}H(\beta)\cdot e^{ip(z-\beta)}d\beta. \tag{13}$$

В нашем случае $z=x-\xi$. В силу (12)

$$H(x-\xi)=\begin{cases}0, & -\infty<\xi<x-at,\quad x+at<\xi<\infty,\\ I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right), & x-at<\xi<x+at.\end{cases} \tag{14}$$

Последовательно применяя (12)–(14), преобразуем (11) и найдем $u_2(x,t)$:

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)d\xi\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)\cdot e^{ip(x-\xi-\beta)}d\beta\right\}=$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)d\xi\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}H(\beta)\cdot e^{ip(x-\xi-\beta)}d\beta\right\}=\frac{1}{2a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)H(x-\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}g(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi.$$

$$\Rightarrow u_2(x,t)=\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}g(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi. \tag{15}$$

Напомним первоначальные выражения для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$:

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\sqrt{a^2p^2-c^2t}\cdot e^{ip(x-\xi)}d\xi, \tag{16}$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ip(x-\xi)}d\xi. \tag{17}$$

Интегрируя (16) по t и сопоставляя выражения (15), (17), получим:

$$\int_0^t u_1(x,\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ip(x-\xi)}d\xi==\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi.$$

Дифференцируя последнее соотношение по t и учитывая, что $I_0(0)=1,\ I_0'(z)=I_1(z)$ [5], найдем $u_1(x,t)$:

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2a}\cdot\left\{a\varphi(x+at)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-x-at)^2}{a^2}}\right)+a\varphi(x-at)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-x+at)^2}{a^2}}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)I_0'\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)\cdot\frac{ct}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}d\xi=$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{ct}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}d\xi,$$

$$\Rightarrow u_1(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{ct}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}d\xi. \tag{18}$$

Складывая (15) и (18), получим:

$$I_1+I_2=\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}g(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi++\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{ct}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}d\xi.$$

Заметим, что можно не производить вычислений I_1+I_2, а сразу же воспользоваться формулой (8). Однако даже используя готовую формулу (8), все же придется произвести некоторые преобразования, учитывая замену $y=at$ и свойства функций Бесселя и «видоизмененных» функций Бесселя.

Теперь, учитывая, что

$$F_p(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)e^{-ip\xi}d\xi,$$

и используя (15), (17)

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,t}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ip(x-\xi)}d\xi=\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}g(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi,$$

вычислим I_3:

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}\int_0^t F_p(\tau)\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,(t-\tau)d\tau\right)\cdot e^{ipx}dp=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}F_p(\tau)\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ipx}dp=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\frac{\sin\sqrt{a^2p^2-c^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{a^2p^2-c^2}}e^{ip(x-\xi)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi.$$

В результате получим

$$u(x,t) = I_1 + I_2 + +I_3,$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi +$$

$$+\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{ct}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\cdot\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi.$$

Таким образом, можно определить функцию $u(x,t)$, если известно уравнение процесса и заданы начальные условия, полностью определяющие задачу с начальными данными.

References

1. *Tihonov A.N., Samarski A.A.* The equations of the mathematical physics. — M.: Science, 1977. — 735 p.
2. *Smirnov M.M.* The differential equations in the particular derivatives of the second order. — Minsk: BSU named V.I.Lenin Publ., 1974. — 232 p.
3. *Korn G., Korn T.* The reference book of mathematics for science workers and engineers. — M.: Science, 1984. — 831 p.
4. *Dech G.* The textbook to the practical application of Laplace transformation and of z-transformation. — M.: Science, 1971. — 288 p.
5. *Volkov I.K., Kanatnikov A.N.* Integral transformations and the operational calculation. — M.: MSTU named N.A.Bauman Publ., 2002. — 225 p.