References

1. *Dubinsky U.A.* About some differential-operative equation of any order // Mathematical collection. — 1973. — Vol. 90 (132). — № 1. — P. 1–22.
2. *Dubinsky U.A.* About one abstract theorem and it's appendices to regional task for no classical equations // Mathematical collection. — 1969. — Vol. 79 (121). — № 1. — P. 91–117.
3. *Romanko V.K.* Solutions boundary tasks for differential-operative equation of high order // Differential equation. — 1978. — Vol. 14. — № 6. — P. 1081–1092.
4. *Urchuk N.I.* About boundary tasks for equation that consist in the main part operators like $\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}}+A$ // Differential equation. — 1974. — Vol. 10. — № 4. — P. 759–762.
5. *Piyatkov S.P.* About correct boundary tasks for equations of a composite type and their generalization // Abstract of candidate thesis. — Novosibirsk, 1982.
6. *Muratbekov M.B.* Coercive estimates for one differential operator of the high order // Differential equation. — 1981. — Vol. 17. — № 5. — P. 893–901.
7. *Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N.* About approximation properties of the solutions of the nonlinear equation of mixed type // Fundamental and applied mathematics (Moscow State University). — 2006. — Vol. 12. — № 5. — P. 95–107.
8. *Muratbekov M.B., Muratbekov M.M.* Estimation of the spectrum of one class of operators of mixed type // Differential equation. — M., 2007. — Vol. 42. — № 1. — P. 135–137.
9. *Otelbaev M.* Embedding theorems spaces with a weight and their application to the study of the spectrum of the Schrodinger operator // Pr. MIAN USSR. — 1979. — Vol. 150. — P. 265–305.

УДК 519.6

Об устойчивости одной приближенной схемы для сингулярной задачи Коши

On the stability of one difference scheme for a singular Cauchy problem

Оспанова А.Б.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: o.ademi111@gmail.com)

Шексіздікте сингулярлы бірінші реттік дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің айырымдық схемасының моделі қарастырылған. Бұл схеманы анықтайтын дискреттік A_n операторлар тізбегі құрастырылған. Бұл тізбектің орнықтылығы дәлелденген.

In the work we consider a model of difference scheme for a numeric solution of Cauchy problem for first order differential equation with the singularity at infinity. We build a sequence of discrete operators A_n for the difference scheme and prove that the sequence A_n is stable.

Пусть дана краевая задача Коши

$$\begin{cases} y' + \upsilon(t)y = z(t) \ \ (t>0); \\ y(0)=\alpha, \end{cases} \tag{1}$$

где $\upsilon(t)$ — непрерывная в $I=[0,\infty)$ функция, такая, что $|\upsilon(t)|>0$ для всех $t\geq 0$ и

$$\int_0^\infty |\upsilon(t)|^{-2}\,dt<\infty. \tag{2}$$

Целью настоящей работы является построение приближенной схемы для численного решения уравнения (1). Следующие определения взяты из [1].

Пусть X, F — банаховы пространства; $L(X,F)$ — пространство всех непрерывных линейных операторов, действующих из X в F. Пусть A — оператор из X в F.

Приближенной схемой уравнения

$$Ay=f \tag{3}$$

называют последовательность уравнений

$$A_n x = f_n \quad (n \geq 1), \tag{4}$$

где $A_n : X_n \to F_n$, X_n (F_n) — банаховы пространства, связанные с X (F) посредством операторов $T_n \in L\left(X, X_n\right) \left(T_n' \in L\left(F, F_n\right)\right)$.

Через $D(A)$ $\left(D\left(A_n\right)\right)$ будет обозначаться область определения оператора A $\left(A_n\right)$.

Существенное значение в сходимости приближенной схемы (4) имеет свойство устойчивости данной схемы.

Будем говорить, что приближенная схема (4) устойчива, если существуют постоянная $\gamma > 0$ и целое $n_0 > 0$ такие, что

$$\left\|A_n x\right\|_{F_n} \geq \gamma \left\|x\right\|_{X_n} \quad \left(x \in D\left(A_n\right),\ \ n \geq n_0\right). \tag{5}$$

Ниже через $\dot{C} = \dot{C}(I)$, $\dot{C}^1 = \dot{C}^1(I)$ будет обозначаться пространство непрерывных на I функций $y(t)$ таких, что

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0,$$

пространство функций $y \in \dot{C}(I)$, имеющих в I непрерывную производную $\frac{dy}{dt} \in \dot{C}(I)$. В $\dot{C}(I)$ зададим норму

$$\|y\|_{\dot{C}} = \sup_{t\geq 0} |\, y(t)\,|.$$

Пусть $L_2(I)$ — пространство Лебега с нормой

$$\|y\|_2 = \left(\int_0^\infty |\, y(t)\,|^2 \, dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $\dot{C}^1 H_\upsilon$ — пространство всех $y \in \dot{C}^1(I)$, имеющих в I абсолютно непрерывную производную $y'(t)$ и таких, что

$$\|y\|_{2,\upsilon}^2 = \int_0^\infty \left(|\, y''\,|^2 + |\, \upsilon^2(t) y\,|^2\right) dt < \infty.$$

Обозначим через $\dot{H}_\upsilon$ пополнение $\dot{C}^1 H_\upsilon$ по норме $\|\cdot\|_{2,\upsilon}$. Уравнение (1) запишем в операторной форме (3), где возьмем

$$Ay = \left(y' + \upsilon(t) y,\ y(0)\right). \tag{6}$$

Оператор A в (6) рассматриваем как оператор из $\dot{H}_\upsilon$ в $\dot{C} \times R$, где $R = (-\infty, \infty)$. Норма в $\dot{C} \times R \ (= F)$

$$\|(z,a); F\| = \|z; \dot{C}\| + |\, a\,|.$$

Область определения $D(A) = \dot{H}_\upsilon$. Обоснование для выбора $F = \dot{C} \times R$ дано в п. 2 данной работы.

п. 1. Построение приближенной схемы

Нетрудно показать, что $\upsilon(t)$ удовлетворяет условию

$$\forall h > 0 \ \lim_{t\to\infty} \int_t^{t+h} \upsilon^4(\zeta) d\zeta = +\infty.$$

В силу этого следующая функция Отелбаева:

$$\upsilon^*(x) = \inf_{h>0} \left\{ h^{-4} \ : \ h^3 \int_x^{x+h} \upsilon^4(t) dt \leq 1 \right\}$$

конечна, а $\mu(t) = \upsilon^*(t)^{-1/4}$ — непрерывная, положительная и ограниченная на I функция. Имеет место характеристическое равенство

$$h^3 \int_t^{t+h} \upsilon^4(\zeta) d\zeta = 1, \ \text{ если } \ h = \mu(t) \ (\text{см. [2]}). \tag{7}$$

Положим $M = \sup\limits_{t\geq 0} \mu(t) < \infty$. Возьмем некоторое достаточно малое $\varepsilon > 0$, и пусть

$$T_\varepsilon = \inf\left\{ t > 0 \ : \ \mu(t) \leq \varepsilon \right\}.$$

Устроим дизъюнктное покрытие отрезка $[0,T_\varepsilon)$ промежутками $\Delta_k=[t_k,t_k+\mu_k)$ $(k=1,2,...,m)$, где $\mu_k=\min\{\mu(t):\ t=\mu(t),\quad t>t_k\}$, $t_1=0$. Для этого возьмем целые m, $n>0$ такие, что $n\ge m=\min\{k\ :\ t_{k+1}\ge T_\varepsilon\}$. Каждому Δ_k соотнесем равномерную сетку $\overline{t_k}=\left(t_{ki}\right)_{i=1}^n$, $t_{ki}=t_{k0}+i\delta_k$, $\delta_k=\mu_k/n$, $t_{k0}=t_{k-i,n}$, ($t_{10}=0$). Пусть $\Delta_{ki}=[t_{k,i-1},t_{ki})$ $(i=1,...,n)$. Мы будем привлекать векторные арифметические пространства l_2^m, $\overline{X}_k$, $\overline{F}_k$ с нормами

$$\left\|\overline{a};l_2^m\right\|=\left(\sum_{i=1}^m|a_i|^2\right)^{1/2},\quad \overline{a}=(a_1,...,a_m);$$

$$\left\|\overline{x}_k;\overline{X}_k\right\|=\left(\delta_k\sum_{i=1}^n x_{ki}^2\right)^{1/2},\quad \overline{x}_k=(x_{k1},...,x_{kn});$$

соответственно

$$\left\|\overline{x}_k;\overline{F}_k\right\|=\max_{1\le i\le n}|x_{ki}|=\left\|\overline{x}_k\right\|_C.$$

Пусть $X_n=\overline{X}_1\times\overline{X}_2\times...\times\overline{X}_m$. Норма

$$\left\|x;X_n\right\|=\left(\sum_{k=1}^m\left\|\overline{x}_k;\overline{X}_k\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Для $(x,a)\in X_n\times R$ положим

$$\left\|(x,a)\right\|=\left\|x;X_n\right\|+|a|.$$

Далее пусть $F_n=\overline{F}_1\times\overline{F}_2\times...\times\overline{F}_m$ с нормой

$$\left\|x;F_n\right\|=\max_{1\le k\le m}\left\|\overline{x}_k\right\|.$$

Для $(x,\overline{a})\in F_n\times l_2^m$ положим

$$\left\|(x,\overline{a})\right\|=\left\|x;F_n\right\|+\left\|\overline{a};l_2^m\right\|.$$

Пусть T_n, T_n', A_n — операторы, заданные равенствами

$$T_ny=\left(\overline{T}_1y,...,\overline{T}_my\right),\ y\in H_\upsilon. \tag{8}$$

Здесь

$$\overline{T}_ky=(y_{k1},...,y_{kn}),\ y_{ki}=y(t_{ki})\ (k=1,2,...,m);$$
$$T_n'z=T_nz,\ z\in\dot{C}(I);$$
$$A_n(x,a)=\left(\overline{A}_1\overline{x}_1,...,\overline{A}_m\overline{x}_m;\overline{x}_0\right),\ \left((x,a)\in X_n\right), \tag{9}$$

где

$$\overline{x}_0=\left(x_{10},x_{20},...,x_{m0}\right),\ x_{k0}=x_{k-1,n}\ (2\le k\le m,\ x_{10}=a); \tag{10}$$

$$\left(\overline{A}_k\overline{x}_k\right)_i=\frac{x_{ki}-x_{k,i-1}}{\delta_k}+\upsilon_kx_{k,i-1}\ (i=1,2,...,n); \tag{11}$$

$$\upsilon_k=\upsilon(t_k)\ (k=1,2,...,m). \tag{12}$$

п. 2. О свойствах приближенной схемы

Будем говорить, что функция $\upsilon(t)$ удовлетворяет условию медленного изменения (относительно характеристического размера $\mu(t)$), если существуют такие $0<\beta_1<\beta_2<\infty$, что (U_1) $\beta_1<\frac{\upsilon(\zeta)}{\upsilon(t)}<\beta_2$, как только $0<\zeta-t<\mu(t)$.

Ниже нами будут использованы следующие известные неравенства (вложения Соболева):

$$\max_{[0,1]}|\varphi^{(k)}|\le c_k\left(\int_0^1\left(|\varphi''|^2+|\varphi|^2\right)d\zeta\right)^{1/2}\quad (k=0,1) \tag{13}$$

с абсолютной постоянной c_k (см. [3]).

Будем говорить, что X вложено в F, если $X\subset F$ и $\|x\|_F\le K\|x\|_X$ для всех $x\in X$.

Утверждение 1. Пусть $\upsilon(t)$ удовлетворяет условию (U_1), тогда $A\in L(\dot{H}_\upsilon,\dot{C})$.

Доказательство. Устроим дизъюнктное разложение $I=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$, $\Delta_k=[t_k,t_k+\mu_k)$. Пусть $y\in\dot{C}^1H_\upsilon$. Полагая в (13)

$$\varphi(\zeta)=y(t_k+\mu_k\zeta),\quad \zeta\in[0,1],$$

получим оценку

$$\max_{\Delta_k}|y|\le c_0\mu_k^{3/2}\left(\int\limits_{\Delta_k}|y''|^2\,dt+\mu_k^{-4}\int\limits_{\Delta_k}|y|^2\,dt\right)^{1/2}=$$

$$=c_0\mu_k^{3/2}\left[\int\limits_{\Delta_k}|y''|^2\,dt+\left(\mu_k^3\int\limits_{\Delta_k}\upsilon_k^4dt\right)^{-1}\int\limits_{\Delta_k}|\upsilon_k^2y(t)|^2\,dt\right]^{1/2}\le$$

$$\le c_0\mu_k^{3/2}\left[\int\limits_{\Delta_k}|y''|^2\,dt+\beta_2\beta_1^{-1}\int\limits_{\Delta_k}|\upsilon^2(t)y|^2\,dt\right]^{1/2}<$$

$$<\tilde{c}_0\mu_k^{3/2}\left[\int\limits_{\Delta_k}\left(|y''|^2+|\upsilon^2(t)y|^2\right)dt\right]^{1/2},\tag{14}$$

где $\tilde{c}_0=c_0(1+\sqrt{\beta_2\beta_1^{-1}})$.

Аналогичные рассуждения приведут к неравенству

$$\max_{\Delta_k}|y'|\le\tilde{c}_1\mu_k^{1/2}\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(y''+|\upsilon^2(t)y|^2\right)dt\right)^{1/2},\tag{15}$$

где $\tilde{c}_1=c_1(1+\sqrt{\beta_2\beta_1^{-1}})$.

Из (15) выводим, во-первых, что

$$|y'(t)|\le\tilde{c}_1\sup_{k\ge\tilde{K}}\mu_k^{1/2}\|y\|_{2,\upsilon},$$

где $\tilde{K}\ :\ t\in\Delta_{\tilde{K}}$, откуда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}|y'(t)|=0.$$

Очевидно также, что

$$\sup_{t\ge0}|y(t)|\le\sup_{k\ge0}\left\{\tilde{c}_1\mu_k^{1/2}\|y\|_{2,\upsilon}\right\}\le\tilde{c}_1M^{1/2}\|y\|_{2,\upsilon}.\tag{16}$$

Из оценки (14) условия (U_1) выводим, что

$$\max_{\Delta_k}|\upsilon y|\le\tilde{c}_0\beta_2\mu_k\left(\mu_k^4\upsilon_k^4\right)^{1/4}\left[\int\limits_{\Delta_k}\left(|y''|^2+|\upsilon^2(t)y|^2\right)dt\right]^{1/2}\le$$

$$\le\tilde{c}_0\beta_2\beta_1^{-1}\mu_k^{1/2}\left(\mu_k^3\int\limits_{\Delta_k}\upsilon^4(t)dt\right)^{1/4}\|y\|_{2,\upsilon}\le\tilde{c}_0\beta_2\beta_1^{-1}\mu_k^{1/2}\|y\|_{2,\upsilon},$$

откуда следуют свойства

$$\lim_{t\to\infty}|\upsilon(t)y(t)|=0;$$

$$\sup_{t\ge0}|\upsilon(t)y(t)|\le\tilde{c}_0\beta_2\beta_1^{-1}M^{1/2}\|y\|_{2,\upsilon}.\tag{17}$$

Наконец, в силу (16), (17)

$$\|Ay\|_{\dot{C}}=\sup_{t\ge0}|Ay(t)|\le\tilde{c}(\beta_1,\beta_2)M^{1/2},$$

где $\tilde{c}(\beta_1,\beta_2)=2(c_0+c_1)\left(\beta_2/\beta_1\right)^{3/2}$.

Утверждение 2. Пусть $\upsilon(t)$ удовлетворяет условию (U_1), тогда $\dot{H}_\upsilon$ вложено в $L_2(I)$.

Доказательство. Пусть $y\in\dot{C}^1H_\upsilon$ и пусть $I=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$, где $\{\Delta_k\}$ — дизъюнктное разложение I из доказательства утверждения 1. Используя (14), выводим оценку

$$\int\limits_0^\infty|y|^2\,dt=\sum_{k=1}^\infty\int\limits_{\Delta_k}|y|^2\,dt\le\tilde{c}_0^2\mu_k^4\sum_{k=1}^\infty\int\limits_{\Delta_k}\left(|y''|^2+|\upsilon^2(t)y|^2\right)dt\le\tilde{c}_1^2M^4\left\|y;H_\upsilon\right\|^2,$$

откуда для $X=\dot{H}_\upsilon$ и $F=\dot{C}$ следует, что X вложено в F с постоянной $K=\tilde{c}_0M^2$.

Утверждение 3. Оператор $T_n \in L(H_\upsilon, X_n)$.

Доказательство. Из оценки (14) выводим, что

$$\left\|\overline{T}_k y;\overline{X}_k\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\delta_k\,|\,y_{ki}\,|^2 \le \mu_k \max_{\Delta_k}|\,y\,|^2 \le$$
$$\le \tilde{c}_0^2 M^4 \int_{\Delta_k}\left(|\,y''\,|^2 + |\,\upsilon^2(t)y\,|^2\right)dt,$$

откуда оценка

$$\left\|T_n y;\overline{X}_1\times\ldots\times\overline{X}_m\right\| = \left(\sum_{k=1}^{m}\left\|\overline{x}_k;\overline{X}_k\right\|^2\right)^{1/2} \le \tilde{c}_0^2 M^2\left\|y;H_\upsilon\right\|.$$

Следовательно, $\left\|T_n;H_\upsilon \to X_n\right\| \le c_1 M^2$.

Утверждение 4. Оператор $T_n' \in L(\dot{C}, F_n)$.

Доказательство. Пусть $z = z(t) \in \dot{C},\ a \in R,$ тогда

$$\left\|T_n' z;F_n\right\|^2 = \max_{1\le k\le m}\left\|\overline{z}_k\right\|_C,$$

где

$$\overline{z}_k = (z(t_{k1}),\ldots,z(t_{kn}))\ \ (k=1,\ldots,m).$$

Норма

$$\left\|\overline{z}_k;\overline{F}_k\right\|\max_{1\le i\le n}|\,z(t_{ki})\,| \le \max_{\Delta_k}|\,z\,| \le \left\|z;\dot{C}\right\|.$$

Тем самым $\left\|T_n';\dot{C}\to F_n\right\| \le 1$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (U_1) и пусть A_n — оператор, заданный равенствами (9)–(12). Тогда приближенная схема (4) с правой частью $f_n = (z, \overline{x}_0)$ устойчива.

Доказательство. Пусть $x = (\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_m)$. Каждому вектору $\overline{x}_k = (x_{k1},\ldots,x_{kn})$ соответствует кортеж $\overline{A}_k\overline{x}_k = \overline{z}_k = (z_{k1},\ldots,z_{kn})$, где

$$z_{ki} = \frac{x_{ki} - x_{k,i-1}}{\delta_k} + \upsilon_k x_{k,i-1}\ (i = 1,2,\ldots,n). \tag{18}$$

Из (18) вытекает представление

$$x_{ki} = \delta_k z_{ki} + r_k x_{k,i-1}\ (i = 1,2,\ldots,n), \tag{19}$$

где $r_k = 1 - \delta_k\upsilon_k$. Заметим, что в силу (U_1) и характеристического равенства (7)

$$\tilde{r}_k = 1 + \delta_k\,|\,\upsilon_k\,| = 1 + \frac{1}{n}\left(\mu_k^3\int_{\Delta_k}\upsilon_k^4 d\zeta\right)^{1/4} \le 1 + \frac{C}{n}, \tag{20}$$

где $C = \beta_1^{\ -1}$. Из (19), (20) следует

$$|\,x_{k1}\,| \le \delta_k\,|\,z_{k1}\,| + \tilde{r}_k x_{k-1,n},$$
$$|\,x_{k2}\,| \le \delta_k\,|\,z_{k2}\,| + \tilde{r}_k(\delta_k\,|\,z_{k1}\,| + \tilde{r}_k\,|\,x_{k-1,n}\,|) =$$
$$= \delta_k\,|\,z_{k2}\,| + \delta_k\tilde{r}_k\,|\,z_{k1}\,| + \tilde{r}_k^{\,2}\,|\,x_{k-1,n}\,|$$

и т.д. $(i > 2)$

$$|\,x_{ki}\,| \le \delta_k(|\,z_{ki}\,| + \tilde{r}_k\,|\,z_{k,i-1}\,| + \tilde{r}_k^{\,2}\,|\,z_{k,i-2}\,| + \ldots$$
$$\ldots + \tilde{r}_k^{\,i-1}\,|\,z_{k1}\,|) + r_k^i\,|\,x_{k-1,n}\,| \le$$
$$\le \delta_k\left\|\overline{z}_k;\overline{F}_k\right\|\sum_{s=0}^{i-1}\tilde{r}_k^{\,s} + \tilde{r}_k^{\,i}\,|\,x_{k-1,n}\,|. \tag{21}$$

Проведем простые оценки. Для любого $i = 1,2,\ldots,n$

$$\tilde{r}_k^i \le \left(1 + \frac{C}{n}\right)^n = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{0}\left(\frac{C}{n}\right)^s =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{(n-s)!n^s}\frac{C^s}{s!} \le \sum_{s=0}^{\infty}\frac{C^s}{s!} = e^C; \qquad (22)$$

$$\sum_{s=0}^{i-1}\tilde{r}_k^s = \frac{\tilde{r}_k^i - 1}{\tilde{r}_k - 1} < \frac{1}{\delta_k \upsilon_k}\tilde{r}_k^i. \qquad (23)$$

Из (21)–(23) следует

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_k \,|\, x_{ki} \,|^2 \le 2\delta_k\left[\left\|\bar{z}_k\right\|_C^2 \delta_k^2\left(\frac{1}{\delta_k \upsilon_k}\sum_{i=1}^{n} r_k^{2i}\right) + |\, x_{k-1,n} \,|^2 \sum_{i=1}^{n} r_k^{2i}\right] \le$$

$$\le 2\delta_k \sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_k^{2i}\left(\upsilon_k^{-2}\left\|\bar{z}_k\right\|_C^2 + |\, x_{k-1,n}\,|^2\right) \le$$

$$\le 2e^{2C}\mu_k\left(\upsilon_k^{-2}\max_{1\le k\le m}\left\|\bar{z}_k\right\|_C^2 + |\, x_{k-1,n}\,|^2\right).$$

В силу последней оценки

$$\left\|x; X_n\right\|^2 = \sum_{k=1}^{m}\left\|\bar{x}_k; \bar{X}_k\right\|^2 \le$$

$$\le 2e^{2C}\max_{1\le k\le m}\left\|\bar{z}_k\right\|_C^2\left(\sum_{k=1}^{m}\int_{\Delta_k}\upsilon_k^{-2}dt\right) + 2e^{2C}\left\|\bar{x}_0; l_2^m\right\| \le$$

$$\le 2e^{2C}\beta_2^2\int_0^{\infty}|\,\upsilon(t)\,|^{-2}\, dt \max_{1\le k\le n}\left\|\bar{z}_k\right\|_C^2 + 2e^{2C}\left\|\bar{x}_0; l_2^m\right\|^2 \le$$

$$\le c^2\int_0^{\infty}|\,\upsilon(t)\,|^{-2}\, dt\left\|A_n(x,a); F_n\right\|,$$

где $c^2 = 2e^{2C}(1+\beta_2^2)$. Возьмем $\gamma = \left(c\left\|\upsilon\right\|_2\right)^{-1}$.

References

1. *Trenogin V.A*. Functional analysis. — 3. — M.: PHYSMATLIT, 2002. — 488 p.
2. *Otelbaev M., Kussainova L.K*. Spectrum estimates for one class of differential operators // Collection of work of inst. of mathem. NAN Ukraine Operators theory, differential equation and function theory. — 2009. — T. 6. — № 1. — P. 165–190.
3. *Sobolev S.L*. Some applications of functional analysis in mathematical physics. — M.: Nauka, 1988. — 336 p.