Таким образом, искомое периодическое решение имеет вид: $x(t) = C_1 \cos\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)t + C_2 \sin\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)t$.

Список литературы

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 216 с.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 182 с.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 501 с.
4. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1983. — 212 с.
5. *Хома Г.П.* Периодические решения волновых дифференциальных уравнений второго порядка. — Киев, 1986. — 44 с.

УДК 517.925.5

Б.Х.Жанбусинова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Мақалада ауытқитын аргументпен берілген, әр түрлі бірінші ретті сызықтық және сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер қарастырылған. Берілген теңдеудің периодтық шешімдерінің бар болу сұрағы зерттеліп. Ол шешімдердің шешілгіштігі жөніндегі теоремалар мен леммалар дәлелденген. Әр жағдай үшін шешімдер саны көрсетілген.

In article different linear and nonlinear differential equations of the first order with deviating argument are considered. The questions of existence of the periodic decisions theses equations are researched. Lemmas and theorems about their solubility are proved. Amount of the decisions is specified for each event.

Математическое моделирование явлений и процессов в биологии, химии, физике, астрономии приводит к необходимости исследования дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В частности, модель биологического сообщества «хищник–жертва» описывается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием и ставится задача нахождения периодического решения.

Исследуем вопрос существования периодических решений уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t-\Delta)\right), \tag{1}$$

где функция $f(t,x)$ — периодическая по t с периодом ω определена для всех $-\infty < t < +\infty$, Δ — постоянная величина, характеризующая отклонение аргумента, причем $0 \le \Delta \le \omega$.

Для исследования нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых аналогичны доказательствам лемм для обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонений аргумента [1].

Лемма 1. Если существует ограниченная при $t \ge 0$ $(t \le 0)$ полутраектория уравнения (1), то либо она является ω-периодическим решением, либо она асимптотически приближается к ω-периодическому решению.

Лемма 2. Если $f\left(t, x(t-\Delta)\right)$ монотонна по x при $a < x < b$, то уравнение (1) в полосе $-\infty < t < +\infty$, $a < x < b$ имеет не более одного периодического решения.

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка с отклонением аргумента

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x(t-\Delta) = q(t), \tag{2}$$

где $p(t), q(t) \in C(-\infty, +\infty)$, $p(t+\omega) = p(t)$, $q(t+\omega) = q(t)$, $\omega > 0$.

Для того чтобы решение $x(t)$ было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы $x(0)=x(\omega)$.

Найдем общее решение уравнения (2), сделав предварительно замену переменной:

$$t-\Delta=s,\ \frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{dx}{ds}+p(s+\Delta)x(s)=q(s+\Delta). \tag{3}$$

Общим решением уравнения (3) будет

$$x(s)=\left[\int_0^s q(\tau+\Delta)\exp\left(\int_0^\tau p(\tau_1+\Delta)\,d\tau_1\right)d\tau+C\right]\exp\left(-\int_0^s p(\tau+\Delta)\,d\tau\right),$$

в силу эквивалентных преобразований общее решение уравнения (2) имеет аналогичный вид:

$$x(t)=\left[\int_0^t q(\tau+\Delta)\exp\left(\int_0^\tau p(s+\Delta)ds\right)d\tau+C\right]\exp\left(-\int_0^t p(\tau+\Delta)\,d\tau\right).$$

В дальнейшем для краткости записи будем обозначать через $E(t)=\exp\left(\int_0^t p(\tau+\Delta)\,d\tau\right)$.

Используя условие периодичности решения $x(0)=x(\omega)$, найдем постоянную C:

$$C=\frac{1}{(E(\omega)-1)}\int_0^\omega q(s+\Delta)E(s)ds.$$

Таким образом, периодическое решение уравнения (2) имеет вид

$$x(t)=\left[\int_0^t q(s+\Delta)E(s)\,ds+\frac{1}{(E(\omega)-1)}\int_0^\omega q(s+\Delta)E(s)\,ds\right]E^{-1}(t). \tag{4}$$

Теорема 1. *Линейное дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом вида* (2):

а) *имеет единственное периодическое решение* (4), *если* $\int_0^\omega p(t+\Delta)dt\neq 0$*;*

б) *не имеет периодических решений, если* $\int_0^\omega p(t+\Delta)\,dt=0$ *и* $\int_0^\omega q(t+\Delta)E(t)dt\neq 0$*;*

в) *имеет множество решений, которые являются периодическими, если* $\int_0^\omega p(t+\Delta)\,dt=0$ *и* $\int_0^\omega q(t+\Delta)E(t)dt=0$.

Лемма 3. Если $\int_0^\omega p(t+\Delta)dt\neq 0$, $q(t+\Delta)\neq 0$, то единственное периодическое решение уравнения (3), следовательно, и уравнения (2) $x(t)\neq 0$, причем $\operatorname{sgn}x(t)=\operatorname{sgn}\left[q(t+\Delta)\int_0^\omega p(t+\Delta)\,dt\right]$.

Это утверждение следует из формулы (4).

Лемма 4. Если существует непрерывная на всей оси ветвь изоклины нуля уравнения (1), т.е. $x=g(t)$ такая, что $f(t,g(t-\Delta))\equiv 0$, причем в полосе $D=\{m<x<M,-\infty<t<+\infty\}$, где $m=\min\limits_{0\le t\le\omega}g(t-\Delta)$, $M=\max\limits_{0\le t\le\omega}g(t-\Delta)$, нет других, отличных от $g(t)$ ветвей уравнения $f(t,x(t-\Delta))=0$, и при этом функция $f(t,x)$ меняет знак при переходе через кривую $g(t)$, то в полосе D существует хотя бы одно ω-периодическое решение уравнения (1).

Доказательство. Пусть, например, $f(t,x(t-\Delta))>0$ при $x>g(t)$, $f(t,x(t-\Delta))<0$ при $x<g(t)$, где $(t,x)\in D$. Тогда любое решение, начинающееся внутри полосы D, не сможет покинуть эту полосу при его продолжении влево, аналогично, и при его продолжении вправо. Тогда, согласно лемме 1,

существует ограниченная полутраектория, которая либо сама является периодическим решением, либо асимптотически приближается к нему, отсюда следует, что в полосе D содержится хотя бы одно периодическое решение уравнения (1).

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = x^2\left(t-\Delta\right) + q(t), \tag{5}$$

где $q(t) \in C(-\infty, +\infty)$, $q(t) = q(t+\omega)$, Δ — постоянная величина, характеризующая запаздывание, причем $0 \le \Delta \le \omega$.

Представляет интерес задача об определении точного числа различных ω-периодических решений уравнения (5).

Очевидно, что при $q(t) > 0$ уравнение (5) не имеет периодических решений, при $q(t) = 0$ имеет одно периодическое решение $x(t) \equiv 0$.

Замечание. Для того чтобы уравнение (5) имело хотя бы одно ненулевое ω-периодическое решение, необходимо, чтобы было выполнено условие

$$\int_0^\omega q(t)dt < 0.$$

Действительно, проинтегрировав (5), получим:

$$x(t)\Big|_0^\omega = \int_0^\omega x^2(t-\Delta)dt + \int_0^\omega q(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^\omega q(t)dt = -\int_0^\omega x^2(t-\Delta)dt < 0.$$

Сделаем замену переменной: $t - \Delta = s$. Тогда уравнение (5) относительно новой переменной примет вид

$$\frac{dx}{ds} = x^2(s) + q\left(s+\Delta\right). \tag{6}$$

Теорема 2. *Если* $q\left(s+\Delta\right) < 0$, *то уравнение* (6), *следовательно, и уравнение* (5) *имеет два периодических решения.*

Доказательство. Рассмотрим изоклину нуля уравнения (6): $x^2(s) + q\left(s+\Delta\right) = 0$. Эта изоклина состоит из двух ветвей: $x_1 = \sqrt{-q\left(s+\Delta\right)}$ и $x_2 = -\sqrt{-q\left(s+\Delta\right)}$, определенных и непрерывных на всей оси, каждая из которых удовлетворяет условиям леммы 2. Согласно этой лемме в каждой из полос $m < x < M$, $-M < x < -m$, $-\infty < t < +\infty$, где $m = \min\limits_{0 \le t \le \omega}\sqrt{-q(s+\Delta)}$, $M = \max\limits_{0 \le t \le \omega}\sqrt{-q(s+\Delta)}$ содержится хотя бы одно ω-периодическое решение уравнения (5), но их не более двух, что доказывается методом от противного.

Следствие. Для того чтобы уравнение (5) имело периодическое решение, необходимо, чтобы всякое ненулевое решение уравнения $\dfrac{d^2y}{dt^2} + q(t+\Delta)y = 0$ было неколеблющимся.

На самом деле, если $x_1(t)$ — периодическое решение уравнения (5), то функция $y = \exp\left(-\int_0^t x_1(\tau)d\tau\right)$ является решением уравнения $\dfrac{d^2y}{dt^2} + q(t+\Delta)y = 0$.

Теорема 3. *Если* $x_1(t)$ — ω*-периодическое решение уравнения* (5), *то при:*

а) $\int_0^\omega x_1(t)dt = 0$ *уравнение* (5) *не имеет других периодических решений, кроме* $x_1(t)$;

б) $\int_0^\omega x_1(t)dt \ne 0$ *существует второе* ω*-периодическое решение* $x_2(t)$, *отличное от* $x_1(t)$, *которое выражается через* $x_1(t)$ *без квадратур.*

Доказательство. Сделав в уравнении (5) подстановку $x(t) = x_1(t) + u(t)$, с учетом условия теоремы получим уравнение:

$$\frac{du}{dt} = u^2(t-\Delta) + 2x_1(t-\Delta)u(t-\Delta).$$

Замена переменной $t-\Delta=s$ приведет к уравнению Бернулли

$$\frac{du}{ds}=u^2(s)+2x_1(s)u(s),$$

которое, в свою очередь, приводится к линейному уравнению

$$z'(s)+2x_1(s)z(s)=-1. \tag{7}$$

Применяя к уравнению (7) теорему 1, получим, что при $\int_0^\omega x_1(t)dt=0$ это уравнение не имеет периодических решений, а при $\int_0^\omega x_1(t)dt\neq 0$ имеет одно периодическое решение $z(t)$.

Следовательно, в первом случае уравнение (5) не имеет других, кроме $x_1(t)$, периодических решений, а во втором случае это уравнение имеет ω-периодическое решение $x_2(t)=x_1(t)+z^{-1}(t)$. С учетом формулы (4) это решение имеет вид

$$x_2(t)=x_1(t)+\frac{E(\omega)-1}{\left[\left(1-E(\omega)\right)\int_0^t E^{-1}(s)ds+E(\omega)\int_0^\omega E^{-1}(s)ds\right]E(t)},$$

где $E(t)=\exp\left(-2\int_0^t x_1(\tau)\,d\tau\right)$.

Пример 1. Уравнение $\frac{dx}{dt}=x^2\left(t-\Delta\right)-\sin 2t-\cos^4(t-\Delta)$ имеет периодическое решение $x_1(t)=\cos^2 t$, период которого $T=\pi$. В силу того, что $\int_0^\pi \cos^2 t dt\neq 0$, данное уравнение имеет второе периодическое решение $x_2(t)=\cos^2 t+u(t)$, где $u(t)$ определяется по формуле (4).

Пример 2. Уравнение $\frac{dx}{dt}=x^2\left(t-\Delta\right)+\cos t-\sin^2(t-\Delta)$ имеет периодическое решение $x_1(t)=\sin t$, период которого $T=2\pi$. В силу того, что $\int_0^{2\pi}\sin t\,dt=0$, данное уравнение не имеет других периодических решений.

Рассмотрим уравнения вида

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x(t-\Delta)\right)-q(t), \tag{8}$$

где $q(t)\in C\left(-\infty,+\infty\right)$, $q(t+\omega)=q(t)$, $\omega>0$, $f\left(x(t-\Delta)\in C\left(-\infty,+\infty\right)\right.$, причем $f(x)$ такова, что имеет место единственность решения [2,3], Δ-постоянная величина, характеризующая отклонение аргумента, причем $0\le\Delta\le\omega$.

Ответ на вопрос о существовании и числе решений уравнения (9) дает следующая теорема

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$ *монотонна и* $[m,M]\subset E\left(f\right)$, *где* $m=\min\limits_{0\le t\le\omega}q\left(t+\Delta\right)$, $M=\max\limits_{0\le t\le\omega}q\left(t+\Delta\right)$. *Тогда уравнение* (8) *имеет единственное периодическое решение периода* $T=\omega$.

Доказательство. Сделаем замену переменной $t+\Delta=s$, тогда $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}$ и уравнение (8) примет вид

$$\frac{dx}{ds}=f\left(x(s)\right)-q\left(s+\Delta\right). \tag{9}$$

Изоклина нуля уравнения (9), т.е. $f\left(x(s)\right)=q\left(s+\Delta\right)\Rightarrow x(s)=f^{-1}\left(q\left(s+\Delta\right)\right)$ — непрерывная однозначная функция, определенная на всей оси, причем правая часть уравнения (9) меняет знак при переходе через эту изоклину. Поэтому, согласно лемме 4, существует ω-периодическое решение уравнения (9), следовательно, уравнение (8), в силу преобразований, имеет ω-периодическое решение периода. Единственность этого решения следует из леммы 2.

Список литературы

1. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964. — 367 с.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 182 с.
3. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 216 с.

ӘОЖ 517.12

Қ.Жетпісов[1], Б.С.Жұмабаев[1], А.М.Джузбаева[2]

[1]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті;
[2]Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті

РЕТТІК ҚАТЫНАСТАР ЖӘНЕ РЕТТЕЛГЕН ЖИЫННЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

В данной статье изучаются свойства частично упорядоченных и линейно упорядоченных множеств. Пропедевтика изучения моделей, отношений изоморфизма и гомоморфизма моделей осуществляется применительно к частично (линейно) упорядоченным и квазиупорядоченным множествам. На примере изучения теоремы о переходе авторы воспроизвели в действии процесс диалектического восхождения от конкретного к абстрактному и вновь к обогащенному восприятию конкретного, но уже на более высоком уровне развития.

In this article properties of partially ordered sets and linearly ordered sets are studying. Propaedeutics of studying models, relations of isomorphism and homomorphism of models are realizing comfortably to partially (linearly) ordered sets and quasiordered sets. Authors reproduced in motion the process of the dialectical ascent from concrete to abstract and again to enriched perception of concrete on more high level of development by example studding of transition theorem.

Реттік құрылымдар мен оларды классификациялауды алғаш айқындаған Н.Бурбаки болатын [1]. Бұл көзқарас қазіргі уақытқа дейін әлі өзгерусіз қалды. Осыған байланысты модельдерді оқып-зерттеу (пропедевтикасы) бастамасы модельдердегі изоморфизм және гомоморфизм қатынастары бөліктік (сызықтық) реттелген және квазиреттелген жиындарға қатысты да қолданылымды. Бұл мақалада енгізілген реттік қатынаспен реттелген жиын әдістемелік ерекшеліктері тұрғысынан қарастырылады. Бөліктік реттелген жиынның, ішкі жиынының ең үлкен (ең кіші), максималды (минималды) элементтері және «тура жоғарғы (тура төменгі) қыры» ұғымдарының ерекшеліктерін көрсету үшін стандартты емес мысалдар келтіріледі.

Математикадағы бұл ұғымдардың универсалдығына (әмбебаптығына) қарамастан, студенттер бұл ұғымдар туралы қажетті деңгейде мағлұмат алмағандықтан, оларға формалды түрде қарап, олардың мағыналарын түсіне бермейді.

Бөліктік (сызықтық) реттелген жиындардағы «модельдердің изоморфизмі» мен «гомоморфизмі» ұғымдары анықталып, негізгі қасиеттері сипатталады және бөліктік реттелген жиынның көрінісі туралы теорема қарастарылады. Бұл теореманың әдістемелік құндылығы, ол нақты мысалдардың көмегімен абстрактілі ұғымдарды дұрыс қабылдауға (түсінуге) көмегін тигізеді.

Теореманың қолданбалық (практикалық) маңыздылығы, ол теоретика-жиындық көріністерді, мысалға, Эйлер-Венн диаграммасын, бөліктік реттік жиындармен жұмыс істегенде қолдануды қамтамасыз етеді. Бұл теореманың технологиялық ерекшелігінде де әдістемелік құндылық бар. Теореманың тұжырымы бойынша кез келген бөліктік реттелген жиынды кейбір жиынның барлық ішкі жиындарының Буль алгебрасының ішкі алгебрасы түрінде кескіндеуге болады.

Бұдан біз бөліктік реттелген жиынның белгілі бір (сәйкесінше) жиындар алгебрасы түрінде анықталуы үшін және оның құрылымдық қасиеттерін анықтаушы аксиомалар жұмыс істеуі үшін өзөзіне жеткіліктігін көреміз.

Студенттердің назарын теореманың дәлелдеуінің негізгі кезеңдеріне және орындалу ретіне аударған жөн. Себебі осы жоба бойынша әріректе Буль алгебрасының көріністері туралы теорема дәлелденеді және онда осы технологиялар қолданылады.