

Схема предиктор-корректор на подвижной сетке для расчета распространения фронта пламени I

The predictor-corrector scheme on mobile net for calculation of spreading of flame front I

Алибиев Д.Б.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: dalibiev@mail.ru)

Мақалада жанармайдың жану негізіндегі оттың таралуының нәтижесі сандық модельдеу арқылы көрсетілген. Жанармай жану кезіндегі оттың жазыңқы кескінін жану аймағындағы бейнесінің ақырлы-айырымдық құрылысы предиктор-корректор негізінде анықталған. Жұмыстың ерекшелігі, аппроксимациялық тұтқырлығы сандық есептеуде жану аймағымен араласуына кедергі жасауында. Ұсақ торды қолдану кезінде жану отының таралу жылдамдығы теориялық мәніне өте жақын екенін байқаймыз. Сонымен бірге предиктор-корректор құрылысы бейімделген торда көрсетілген. Оттың таралу процесінің қарапайым математикалық моделінің санау алгоритмі жасалған.

In the article results of computational modeling of process of flame spreading in fuel mixture at basis of the finite-difference predictor-corrector scheme, approximative viscosity of with prevents from rise of numerical oscillation and promotes to receive plain profile of parameters in neighbourhood of flame front. It is shown that estimated speed of flame spreading is near by theoretical meaning at use of small nets, and the predictor-corrector scheme on adaptive net is cited. The algorithm of calculation of process of flame spreading within the bounds of easy mathematical model is composed.

Исследование процесса горения, т.е. быстрого протекания реакции в веществе, инертном в исходном состоянии, актуально на протяжении многих лет. Важность процесса горения в технических устройствах способствовала созданию различных моделей, позволяющих описывать его с необходимой точностью.

Режим горения бывает ламинарным или турбулентным. Турбулентное горение представляет собой очень сложное физическое явление, трудно поддающееся численному моделированию. Одномерное описание более простого ламинарного горения позволяет получить аналитически важные выводы о фронте горения, которые затем используются в более сложных турбулентных моделях. Также, в зависимости от того, смешиваются ли горючее и окислитель перед тем как сгореть либо перемешивание и горение происходят одновременно, пламена подразделяются на пламена предварительно перемешанной и предварительно неперемешанной смесей, соответственно.

Уравнения параболического типа входят во многие математические модели, описывающие разнообразные физические явления. В частности, такие уравнения входят в модели, характеризующие процессы горения углеводородных топлив в проточной части химических реакторов. Моделирование таких процессов осложняется наличием зоны с большими перепадами температуры и концентрации горючей смеси — фронта пламени. Фронты пламени могут двигаться с большими скоростями. Таким образом, изучаемый процесс является существенно нестационарным. Кроме того, в реальных установках распространение пламени по горючей смеси происходит в проточной части со сложной геометрией, поэтому моделирование необходимо выполнять в рамках многомерных математических моделей. Использование слишком мелких сеток в каждом из координатных направлений требует неприемлемо большого объема и времени вычислений.

Эти особенности приводят к необходимости создания численных методов, которые на сравнительно грубых сетках могли бы хорошо описывать фронты пламени, скачки температуры и концентрации, скорости движения фронта пламени.

В настоящей работе представлен алгоритм численного решения системы нестационарных уравнений, описывающий процесс распространения пламени в двухкомпонентной горючей смеси. Для численного моделирования указанного процесса желательное использование неравномерных подвижных сеток, имеющих сгущения в области больших значений градиентов температуры и концентрации смеси, поскольку расчеты на таких сетках могут иметь высокую точность даже при небольшом количестве узлов [1].

В предлагаемой конечно-разностной схеме предиктор-корректор на шаге предиктор используется метод расщепления с явной аппроксимацией конвективных членов на первом дробном шаге и неявной аппроксимацией диффузионных членов на втором дробном шаге, при этом члены, отвечающие за процесс горения, включаются во второй дробный шаг. Кроме того, на шаге предиктор по явной схеме определяются потоки на гранях ячеек. Предложен способ выбора схемных параметров, позволяющий рассчитывать профили численного решения без паразитических осцилляций.

Предложенная методика адаптации сетки к движущемуся фронту пламени отработана на скалярном нелинейном уравнении конвекции-диффузии с нелинейной правой частью и модельной системе двух нелинейных уравнений. Для построения сетки применялся метод эквираспределения, ориентированный на использование в нестационарных задачах. Показано, что использование адаптивных сеток позволяет получать численное решение с такой же точностью, как на равномерной сетке, но с числом узлов, на порядок меньшим. Демонстрация полученных результатов выполнена на модельных задачах для одномерных линейного и нелинейного уравнений конвекции-диффузии, а также для упрощенной модели горения.

1. Монотонная схема предиктор-корректор на равномерной сетке для линейного уравнения переноса

1.1 При исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т.е. конвективный перенос. Поэтому как в газовой динамике, так и в гидродинамике в качестве базовых математических моделей многих процессов выступают начально-краевые задачи для уравнений конвекции-диффузии. Характерным примером нестационарной задачи конвекции является начально-краевая задача для линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом a :

$$u_t + au_x = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l; \tag{2}$$

$$u(l, t) = \mu_l(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

Здесь x — пространственная переменная; t — время; a — характерная скорость среды (в настоящем параграфе предполагается, что $a = const < 0$).

1.2 Для численного решения задачи (1)–(3) рассмотрим схему предиктор-корректор, которая состоит из двух шагов. На этапе предиктора решается уравнение

$$\frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad j = 0, \dots, N-1, \tag{4}$$

где τ — шаг по времени; $h = \frac{l}{N}$ — пространственный шаг равномерной сетки $x_j = jh, j = 0, \dots, N$;

$$\tau_{j+1/2}^* = \frac{\tau}{2} (1 + \theta_{j+1/2}), \tag{5}$$

где $\theta_{j+1/2}$ — некоторая неотрицательная сеточная функция, которая вводит в схему аппроксимационную вязкость.

На этапе корректора аппроксимируется уравнение (1) в дивергентной форме

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \tag{6}$$

На нулевом временном слое полагаем

$$u_j^0 = u_0(x_j). \tag{7}$$

В граничном узле $x_N = l$ вычисляются значения u_N^{n+1}

$$u_N^{n+1} = \mu_l(t_{n+1}). \tag{8}$$

1.3 Заметим, что свойства рассматриваемой схемы сильно зависят от параметра θ . Схема при $\theta = 0$ совпадает со схемой Лакса-Вендроффа, а при $\theta = \frac{1}{Cr} - 1$ — с противопоточной явной схемой, где число Куранта Cr вычисляется по формуле

$$Cr = |a| \frac{\tau}{h}.$$

Известно, что схема Лакса-Вендроффа имеет второй порядок аппроксимации, но дает нефизические осцилляции на разрывных решениях, а противопоточная схема имеет первый порядок аппроксимации, сохраняет монотонность численного решения, но сильно размывает разрывы. Отметим также, что при любом постоянном значении $\theta \neq 0$ схема предиктор-корректор (4), (6) для уравнения переноса (1) имеет всегда первый порядок аппроксимации и она сохраняет монотонность численного решения, если постоянный параметр θ лежит в отрезке

$$\frac{1}{Cr} - 1 \leq \theta \leq \frac{1}{Cr^2} - 1. \quad (9)$$

Согласно [2], если функцию θ выбрать по формуле

$$\theta_{j+1/2} = \begin{cases} 0, & \left| u_{x,j+1/2} \right| \leq \left| u_{x,j+1/2-s} \right|, \quad u_{x,j+1/2} \cdot u_{x,j+1/2-s} \geq 0; \\ \theta_0 \left(1 - \frac{u_{x,j+1/2-s}}{u_{x,j+1/2}} \right), & \left| u_{x,j+1/2} \right| > \left| u_{x,j+1/2-s} \right|, \quad u_{x,j+1/2} \cdot u_{x,j+1/2-s} \geq 0; \\ \theta_0, & u_{x,j+1/2} \cdot u_{x,j+1/2-s} < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $s = \operatorname{sgn} a$;

$$u_{x,j+1/2} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h}; \quad \theta_0 = \frac{1}{Cr} - 1, \quad (11)$$

то схема предиктор-корректор (4), (6) будет аппроксимировать уравнение переноса (1) со вторым порядком по τ и h и, кроме того, она будет сохранять монотонность численного решения.

1.4 Выполним экспериментальное исследование свойств схемы (4), (6). В качестве тестовой возьмем задачу, в которой начальная функция задана по формуле

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & \text{если } x \leq x_0; \\ u_2, & \text{если } x > x_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $a = -0,4$; $u_1 = 300$; $u_2 = 2200$; $l = 0,25$; $T = 0,25$; $x_0 = 0,2$. Граничное значение $\mu_l(t) = 2200$. Точное решение задачи (1), (12), (3) задается формулой

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } x \leq x_0 + at; \\ u_2, & \text{если } x > x_0 + at. \end{cases} \quad (13)$$

Во всех численных экспериментах шаг по времени задавался следующим образом:

$$\tau = k_{зан} \frac{h}{|a|}, \quad (14)$$

где $k_{зан}$ — коэффициент запаса, который во всех расчетах полагался равным 0,5. Для уравнения переноса (1) схема (4), (6) с $\theta = 0$ называется схемой Лакса-Вендроффа. Видно, что при использовании этой схемы в численном решении появляются осцилляции (см. рис. 1 а). Рассмотрим теперь результаты решения тестовой задачи при некотором $\theta = \text{const} > 0$.

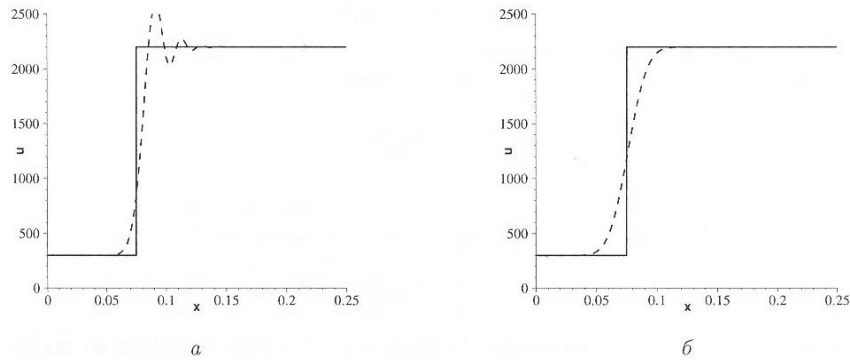


Рис. 1. Графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t = 0,25$: a — схема Лакса-Вендроффа; b — противопоточная схема, $N = 100$

Возьмем какое-нибудь значение θ , например, $\theta = \frac{1}{Cr} - 1$. Тогда получаем противопоточную схему. Видно, что в расчетах по схеме первого порядка аппроксимации (см. рис. 1 б) численное решение не имеет осцилляций. Но поскольку схема имеет только первый порядок аппроксимации, то численное решение сильно сглаживается со временем («размазывается»).

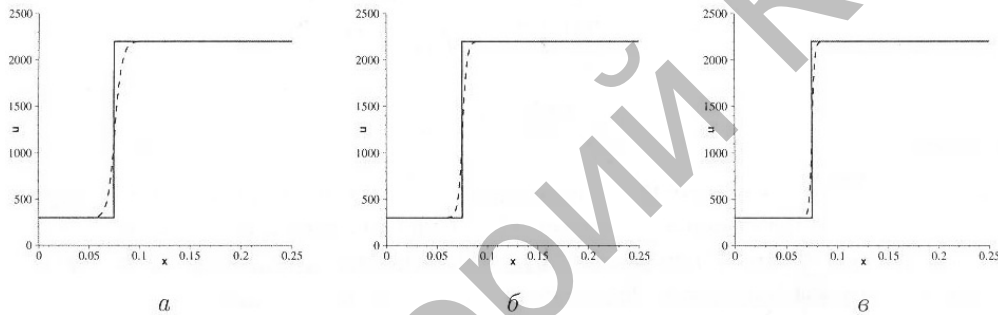


Рис. 2. Графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t = 0,25$, полученные на различных сетках с переменным θ : $a - N = 100$; $b - N = 200$; $c - N = 400$

Далее возьмем переменное θ специального вида (10). На рисунке 2 приведено сравнение численного решения с точным для равномерных сеток с различным количеством узлов.

Как видно, схема действительно сохраняет монотонность решения и уже не так сильно сглаживает его со временем ввиду второго порядка аппроксимации такой схемы. При этом на мелкой сетке численное и точное решения очень близки. Очевидно, что при выборе θ по формуле (10) получаются лучшие результаты, чем по схеме Лакса-Вендроффа и противопоточной схеме. Однако на грубых равномерных сетках численное решение сильно отличается от тестового. Поэтому имеет смысл рассмотреть эту схему на адаптивных сетках.

Таким образом, построенная схема предиктор-корректор (4), (6) позволяет получать численное решение без осцилляций, причем на мелкой сетке точность численного решения высока. Далее усложним задачу и рассмотрим эту схему для нелинейного уравнения.

2. Монотонная схема предиктор-корректор на равномерной сетке для нелинейного уравнения Бюргерса

2.1 Обобщим теперь рассмотренную в предыдущем параграфе схему предиктор-корректор на случай нелинейного уравнения Бюргерса. Для этого уравнения рассмотрим следующую задачу:

$$u_t + f_x = \nu u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad \nu = \text{const} > 0; \quad (15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (16)$$

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(l, t) = \mu_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

где $f = -\frac{u^2}{2}$ — функция переменного u .

В качестве тестовой рассмотрим задачу с точным решением

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{x + t/2 - x_0}{4v} \right), \quad (18)$$

при этом

$$\begin{aligned} \mu_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{t/2 - x_0}{4v} \right), \quad \mu_l(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{l + t/2 - x_0}{4v} \right); \\ u_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{x - x_0}{4v} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Как и в §1, полагаем $l = 0,25$, $x_0 = 0,2$, $T = 0,25$. Коэффициент диффузии возьмем равным $v = 2 \cdot 10^{-5}$.

2.2 Как и в §1, рассмотрим схему предиктор-корректор на равномерной неподвижной сетке с узлами $x_j = jh$ и шагом $h > 0$. На шаге предиктор происходит расщепление на конвективную и диффузионную части [3]:

$$u_t + f_x = 0; \quad (20)$$

$$u_t = \nu u_{xx}. \quad (21)$$

Таким образом, на шаге предиктор

$$\frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{u_j^* - \frac{1}{2}(u_{j-1/2}^* + u_{j+1/2}^*)}{\frac{\tau}{2}} = \nu \frac{u_{j-1/2}^* - 2u_j^* + u_{j+1}^*}{h^2}. \quad (23)$$

Вычисляются две вспомогательные величины $u_{j+1/2}^*$ и u_j^* . Первая из них определяется из уравнения с конвективным переносом (22). Она относится к полужелому узлу $x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2}$. В уравнении (22) величина $\tau_{j+1/2}^* = 0,5\tau \left(1 + \theta_{j+1/2}^* \right)$; τ — шаг по времени; $\theta_{j+1/2}^*$ — параметр схемы (он определяется ниже):

$$a_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}, & \text{если } u_{j+1}^n \neq u_j^n, \\ a(u_j^n), & \text{если } u_{j+1}^n = u_j^n, \end{cases}$$

где $a(u) = f_u(u) = -u$. Вторая величина u_j^* вычисляется на этапе с диффузионным переносом (23). Для реализации этого шага можно использовать метод прогонки, где вычисляются необходимые величины $u_0^* = \mu_0 \left(t_n + \frac{\tau}{2} \right)$ и $u_N^* = \mu_l \left(t_n + \frac{\tau}{2} \right)$.

Кроме этого, для шага корректор требуется вычисление еще одной предикторной величины $f_{j+1/2}^*$. Ее можно вычислить, аппроксимируя уравнение $f_t + af_x = 0$, которое получается умножением на a уравнения (20). Таким образом, шаг предиктор дополнится уравнением

$$\frac{f_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a_{j+1/2}^n \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0. \quad (24)$$

На этапе корректор

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{h} = \nu \frac{u_{j-1}^* - 2u_j^* + u_{j+1}^*}{h^2} \quad (25)$$

вычисляются искомые величины u_j^{n+1} , определенные в целых узлах x_j .

При $\theta = 0$ выписанная схема является аналогом схемы Лакса-Вендроффа. Если $\theta = O(h)$, то схема (22)–(25) аппроксимирует уравнение (15) со вторым порядком относительно τ и h . Необходимое условие устойчивости, полученное для случая $a(u) = const$, требует, в частности, чтобы параметр θ принимал неотрицательные значения. Поэтому далее предполагается выполненным следующее ограничение:

$$\theta_{j+1/2}^n \geq 0. \quad (26)$$

Согласно работе [2], если функцию θ выбирать по формуле (аналог формулы (10))

$$\theta_k = \begin{cases} 0 & \text{при } \left| \tilde{g}_k \right| \leq \left| \tilde{g}_{k-s} \right|, \quad \tilde{g}_k \cdot \tilde{g}_{k-s} \geq 0; \\ \theta_{0,k} \frac{\tilde{g}_k - \tilde{g}_{k-s}}{\tilde{g}_k} & \text{при } \left| \tilde{g}_k \right| > \left| \tilde{g}_{k-s} \right|, \quad \tilde{g}_k \cdot \tilde{g}_{k-s} \geq 0; \\ \theta_{0,k} & \text{при } \tilde{g}_k \cdot \tilde{g}_{k-s} < 0, \end{cases} \quad (27)$$

где $k = j + 1/2$, $s = \text{sgn } a_{j+1/2}^n$;

$$\tilde{g}_{j+1/2} = \left| a_{j+1/2}^n \right| \left(1 - \aleph \left| a_{j+1/2}^n \right| \right) u_{x,j+1/2}^n; \quad (28)$$

$$\theta_{0,j+1/2} = \frac{1 - \aleph \left| a_{j+1/2}^n \right|}{\aleph \left| a_{j+1/2}^n \right|}, \quad (29)$$

то схема предиктор-корректор (22)–(25) будет аппроксимировать уравнение (15) со вторым порядком по τ и h и будет сохранять (при $\nu = 0$) монотонность численного решения.

2.3 Проведем экспериментальное исследование схемы (22), (23), (24), (25) путем сравнения численного решения с точным, при этом начальные данные выбираем в виде (19). По аналогии с задачей из §1 график решения движется со временем влево. Во всех численных экспериментах шаг по времени задавался следующим образом [4]:

$$\tau = k_{зан} h,$$

где $k_{зан}$ — коэффициент запаса, который во всех расчетах полагался равным 0,5.

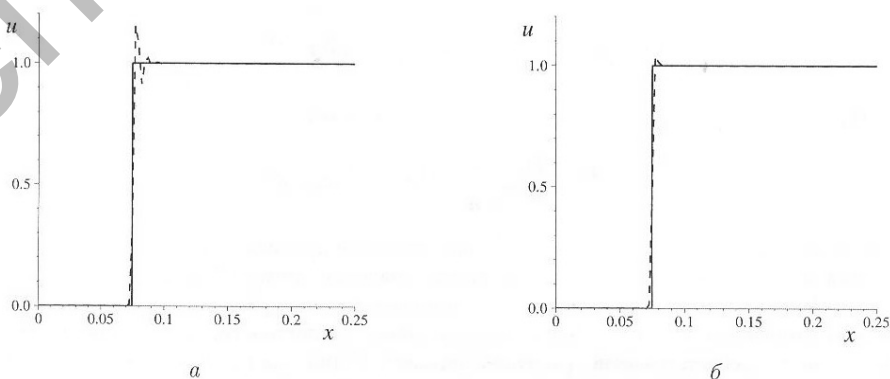


Рис. 3. Графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t = 0,25$: а — $\theta = 0$; б — $\theta = 1$, $N = 100$

Расчеты проводились для различных θ . На рисунке 3 *а* выбирался $\theta = 0$ и $\theta = const$ (в качестве константы в расчетах брали $\theta = 1$). При нулевом параметре θ появляются осцилляции численного решения, во втором же случае (рис. 3, *б*) осцилляции также присутствуют, но уже в меньшей степени. Схемы с таким выбором θ ($B = const > 0$) имеют первый порядок аппроксимации.

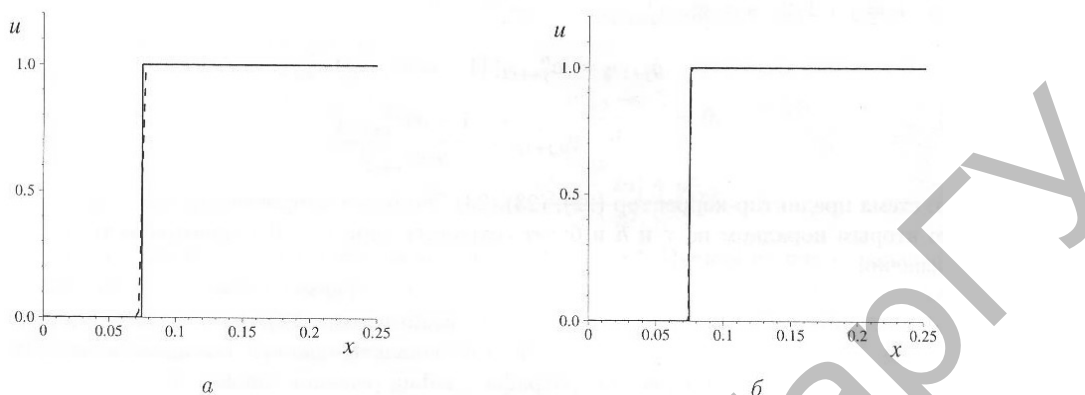


Рис. 4. Графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t = 0,25$, полученные на различных сетках с переменным θ : *а* – $N = 100$; *б* – $N = 400$

Далее выбирали переменное θ по формуле (27), что приводит к схеме второго порядка аппроксимации. На рисунке 4 приведены полученные результаты для сеток с различным количеством узлов. В этом случае мы получили хорошее приближение численного решения к точному, причем такая схема сохраняет монотонность численного решения.

3. Схема предиктор-корректор на равномерной сетке для уравнения с нелинейным источником

3.1 Теперь обобщим рассмотренную в предыдущем параграфе схему предиктор-корректор на случай нелинейного неоднородного уравнения, правая часть которого содержит функцию $g(u)$, зависящую от искомого решения. Для этого уравнения рассмотрим следующую задачу:

$$u_t + f_x = \nu u_{xx} + g(u), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad \nu = const > 0; \tag{30}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l; \tag{31}$$

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(l, t) = \mu_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{32}$$

где

$$f = -\frac{u^2}{2}, \quad g(u) = \frac{1}{\nu} \left(u - \frac{1}{2} \right) u(1-u).$$

Эта задача имеет точное решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} th \left(\frac{x + \frac{t}{2} - x_0}{2\nu} \right). \tag{33}$$

3.2 Рассмотрим схему предиктор-корректор на равномерной неподвижной сетке с узлами $x_j = jh$ и шагом $h > 0$. На шаге предиктор происходит расщепление на конвективную и диффузионную части, при этом источниковый член включен в конвективную часть:

$$u_t + f_x = g(u); \tag{34}$$

$$u_t = \nu u_{xx}. \tag{35}$$

Таким образом, на шаге предиктор

$$\frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a_{j+1}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = g\left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right); \quad (36)$$

$$\frac{u_j^* - \frac{1}{2}(u_{j-1/2}^* + u_{j+1/2}^*)}{\frac{\tau}{2}} = v \frac{u_{j-1}^* - 2u_j^* + u_{j+1}^*}{h^2} \quad (37)$$

вычисляются две вспомогательные величины: $u_{j+1/2}^*$ и u_j^* . Первая из них определяется из уравнения с конвективным переносом (36). Вторая величина, u_j^* , вычисляется на этапе с диффузионным переносом (37).

Кроме того, для шага корректор требуется вычисление еще одной предикторной величины $f_{j+1/2}^*$. Ее можно вычислить, аппроксимируя уравнение $f_t + af_x = ag$, которое получается умножением на a уравнения (34). Таким образом, шаг предиктор дополнится уравнением

$$\frac{f_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a_{j+1/2}^n \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = a_{j+1/2}^n g\left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right). \quad (38)$$

На этапе корректор

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{h} = v \frac{u_{j-1}^* - 2u_j^* + u_{j+1}^*}{h^2} + g(u_j^*) \quad (39)$$

вычисляются искомые величины u_j^{n+1} , определенные в целых узлах x_j .

Также рассмотрим еще одну схему для задачи, когда источниковый член включен в диффузионную часть:

$$u_t + f_x = 0; \quad (40)$$

$$u_t = \nu u_{xx} + g(u). \quad (41)$$

Первое уравнение шага предиктор будет совпадать с уравнением (22):

$$\frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0,$$

а во втором добавится слагаемое источниковой части:

$$\frac{u_j^* - \frac{1}{2}(u_{j-1/2}^* + u_{j+1/2}^*)}{\frac{\tau}{2}} = v \frac{u_{j-1}^* - 2u_j^* + u_{j+1}^*}{h^2} + g\left(\frac{u_{j-1/2}^* + u_{j+1/2}^*}{2}\right). \quad (42)$$

Функция g вычисляется здесь по полусумме знаний $u_{j-1/2}^*$ и $u_{j+1/2}^*$ для того, чтобы это уравнение можно было решить методом прогонки.

Величина $f_{j+1/2}^*$ вычисляется по формуле (24). Шаг корректор совпадает с уравнением (39).

3.3 Сравним результаты расчетов для приведенных схем. Во всех расчетах коэффициент диффузии был равен $\nu = 2 \cdot 10^{-4}$, коэффициент запаса $k_{зан} = 0,5$. На рисунке 5 изображены графики точного и численного решений, полученных по схеме 1, с источником в конвективной части. При $\theta = 0$ удалось провести расчет на сетке с количеством узлов $N = 400$, однако численное решение имеет небольшие осцилляции. Если функцию θ вычислять по формуле (27), то численное решение получится монотонным, но расчеты можно было выполнять только на очень мелких сетках ($N = 1000$).

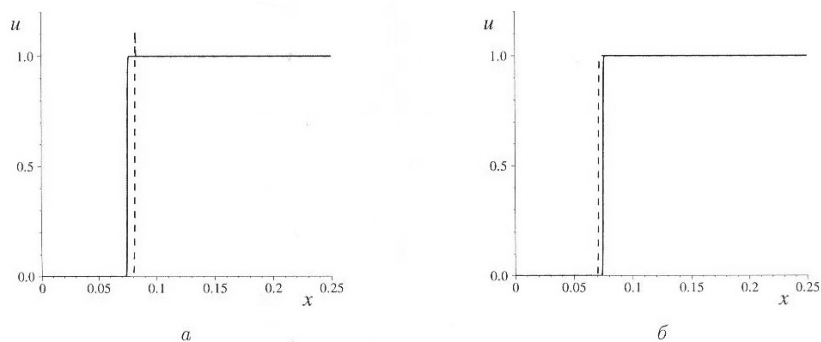


Рис. 5. Графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t = 0,25$, полученные по схеме 1: $a - \theta = 0$; $N = 400$; $b - \theta$ вычисляется по формуле (27), $N = 1000$

При использовании схемы 2 с источником в диффузионной части (рис. 6 б) численное решение, когда θ вычисляется по формуле (27), также монотонно и практически совпадает с точным решением на сетке с $N = 400$. Поскольку использование схемы 2 привело к более точным результатам, то для дальнейших расчетов будем использовать именно эту схему [5].

Отметим, что на более грубых сетках с числом узлов $N < 400$ численное решение получить не удалось. Это связано с тем, что источниковый член $g(u)$, полученный численно, на более грубых сетках значительно отличается от точной функции $g(u)$ (рис. 7). Поэтому имеет смысл проводить расчеты на адаптивных сетках, имеющих сгущения в зоне больших значений градиента решения, а следовательно, и в области больших значений производных от источникового члена. При этом, основываясь на анализе, проведенном выше, для адаптивных сеток будем использовать схему 2.

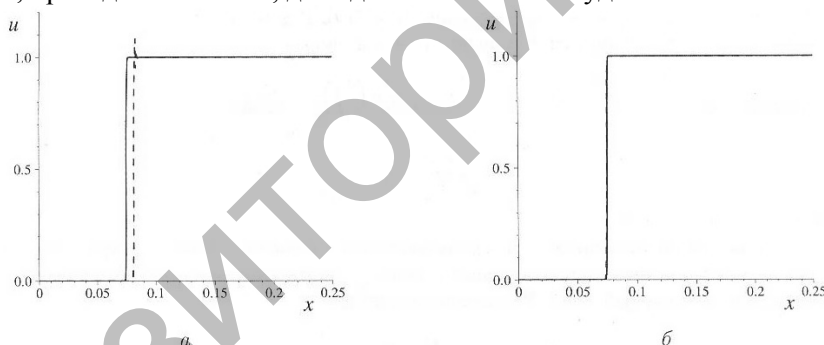


Рис. 6. Графики точного (сплошная линия) и численного (штриховая линия) решений в момент времени $t = 0,25$, полученные по схеме 2: $a - \theta = 0$, $N = 400$; $b - \theta$ вычисляется по формуле (27), $N = 1000$

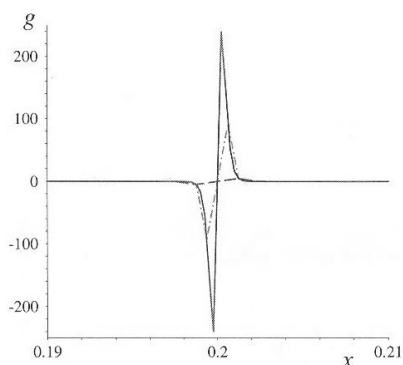


Рис. 7. Графики функции источника $g(u)$ при $t = 0$ и разным числе сетки: $N = 1000$ — сплошная линия; $N = 400$ — штрихпунктирная линия; $N = 200$ — штриховая линия

References

1. Varnets Y., Maas U., Dibbl R. *Gorenje*. Physical and chemical aspects, modeling, experiments, formation of polluting substances. — M.: Phizmatlit, 2003.
2. Hakimzjanov G.S., Shokin Y.I. Differential of the scheme on adaptive grids: In 3ch. P.1: Problems for the equations in private derivatives from one spatial variable. — Novosibirsk: NSU, 2005.
3. Zeldovich I.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B., Mahviladze G.M. *Mathematical theory of burning and explosion*. — M.: Science, 1980.
4. Verwer J.G., Blom J.G., Sanz-Serna J.M. An adaptive moving grid method for one-dimensional systems of partial differential equations // *J.Comput. Phys.* — 1989. — Vol. 82. — №. 2. — P. 454–486.
5. Hakimzjanov G.S., Shokin Y.I., Barahnin V.B., Shokina N.Y. Numerical modeling of currents of a liquid with superficial waves. — Novosibirsk: Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2001. — 394 p.

УДК 519.6:551.46

Схема предиктор-корректор на подвижной сетке для расчета распространения фронта пламени II

The predictor-corrector scheme on mobile net for calculation of spreading of flame front II

Алибиев Д.Б.¹, Хахимзянов Г.С.²¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: dalibiev@mail.ru);²Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия (E-mail: khak@ict.nsc.ru)

Мақалада жанармайдың жану негізіндегі оттың таралуы нәтижесі сандық модельдеу арқылы көрсетілген. Жанармай жану кезіндегі оттың жазыңқы кескінін жану аймағындағы бейнесінің ақырлы-айырымдық құрылысы предиктор-корректор негізінде анықталған. Жұмыстың ерекшелігі, аппроксимациялық тұтқырлығы сандық есептеуде жану аймағымен араласуына кедергі жасауында. Ұсақ торды қолдану кезінде жану отының таралу жылдамдығы теориялық мәніне өте жақын екенін байқаймыз. Сонымен бірге предиктор-корректор құрылысы бейімделген торда көрсетілген. Оттың таралу процесінің қарапайым математикалық моделінің санау алгоритмі жасалған.

In the article results of computational modeling of process of flame spreading in fuel mixture at basis of the finite-difference predictor-corrector scheme, approximative viscosity of with prevents from rise of numerical oscillation and promotes to receive plain profile of parameters in neighbourhood of flame front. It is shown that estimated speed of flame spreading is near by theoretical meaning at use of small nets, and the predictor-corrector scheme on adaptive net is cited. The algorithm of calculation of process of flame spreading within the bounds of easy mathematical model is composed.

4. Схема предиктор-корректор на адаптивной сетке

4.1 Для того чтобы построить схему на подвижной сетке, надо переписать задачу (30)–(32) в новых координатах (q, t) , связанных с исходными координатами (x, t) гладким преобразованием

$$x = x(q, t); \quad 0 \leq q \leq 1; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (43)$$

с положительным якобианом $J(g) = x_q$, которое взаимно-однозначно отображает единичный отрезок $\bar{Q} = [0, 1]$ на область решения $\bar{\Omega} = [0, 1]$. В координатах (q, t) уравнение (30) можно записать в дивергентной и недивергентной формах:

$$(Jv)_t + (f - x_t v)_q = v \left(\frac{v_q}{J} \right) + Jg(v); \quad (44)$$