

References

1. Larionov A.I., Jurchenko T.I. Economic-mathematical methods in planning. — M.: High school, 1984. — 248 p.
2. Zuhovitskij S.I., Radchik I.A. Mathematical methods of network planning. — M.: Science, 1978. — 296 p.

УДК 517.956

**Об однозначной разрешимости периодической краевой задачи
для системы гиперболических уравнений**

**On one-valued solvability of the periodic boundary problem for system of the
hyperbolic equations**

Орумбаева Н.Т., Сабитбекова Г.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: Orumbayevan@mail.ru)

Мақалада аралас туындылы гиперболалық тендеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп қарастырылады. Гиперболалық тендеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің шешімін табудың конструктивті алгоритмі ұсынылады. Алгоритмнің жинақтылығының және зерттелініп отырған есептің шешілімдігінің жеткілікті шарттары тағайындалады.

Periodic boundary problem for system of the hyperbolic equations with mixed derivative is considered in the article. The constructional algorithm of finding periodical boundary problem's solution for system of hyperbolic equations is offered. The necessary and sufficient conditions of algorithm and one-valued solvability of investigating problem are established.

На $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

где $(n \times n)$ — матрицы $A(x, t)$, $C(x, t)$ и n -вектор-функция $f(x, t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$; n -вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируемая на $[0, T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T)$,

$\|u(x, t)\| = \max_{i=1, n} |u_i(x, t)|$, $\|A(x, t)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x, t)|$. Пусть $C(\bar{\Omega}, R^n)$ — пространство функций $u: \bar{\Omega} \rightarrow R^n$,

непрерывных на $\bar{\Omega}$, с нормой $\|u\|_0 = \max_{(x, t) \in \bar{\Omega}} \|u(x, t)\|$.

Функция $u(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R^n)$,

называется решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$ и краевым условиям (2), (3), а на характеристике $x = 0$ принимает заданные значения $\psi(t)$, $t \in [0, T]$.

Краевые задачи для систем гиперболических уравнений были исследованы различными методами многими авторами [1–5]. В работе [6] более общая нелокальная задача исследовалась методом введения функциональных параметров. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости в терминах коэффициентов и предложен алгоритм нахождения ее решения, каждый шаг которого состоит из двух пунктов: нахождение введенных функциональных параметров; нахождение решения задач Гурса на малых областях.

В настоящей работе предлагается другой алгоритм решения исходной задачи, где нет необходимости находить решения задач Гурса на каждом шаге алгоритма.

Введем новые неизвестные функции $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, и задачу (1)–(3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + C(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad (4)$$

$$v(x,0) = v(x,T), \quad x \in [0, \omega], \quad (5)$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T]. \quad (6)$$

Здесь задача нахождения решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений (1)–(3) сведена к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) и функциональному соотношению (6). Задачи (1)–(3) и (4)–(6) эквивалентны в том смысле, что если функция $u^*(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), то пара $\left(u^*(x,t), v^*(x,t) = \frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}\right)$ будет решением задачи (4)–(6), и наоборот — если пара $(\hat{u}(x,t), \hat{v}(x,t))$ — решение задачи (4)–(6), то $\hat{u}(x,t)$ — решение задачи (1)–(3).

Для решения задачи (4)–(6) применяется метод параметризации.

По шагу $h > 0: Nh = T$ произведем разбиение $[0,T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh]$, $N = 1, 2, \dots$. При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t)$, $u_r(x,t)$ обозначим соответственно сужение функции $v(x,t)$, $u(x,t)$ на $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$. Тогда задача (4)–(6) будет эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + C(x,t)u_r(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + B(x,t)w_r(x,t) \quad (7)$$

$$v_1(x,0) - \lim_{t \rightarrow T-0} v_N(x,t) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} v_s(x,t) = v_{s+1}(x,sh), \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (9)$$

$$u_r(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v_r(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N}, \quad (10)$$

где (9) — условие склеивания функций $v(x,t)$ во внутренних линиях разбиения. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t = (r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x) = v_r(x, (r-1)h)$, и сделаем замену: $\tilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\tilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r(x) + B(x,t)w_r(x,t) \quad (11)$$

$$\tilde{v}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r = \overline{1, N}, \quad (12)$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_N(x) - \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{v}_N(x,t) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (13)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \tilde{v}_s(x,t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (14)$$

$$u_r(x,t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r(\xi,t)d\xi + \int_0^x \lambda_r(\xi)d\xi, \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Задачи (7)–(10) и (11)–(15) эквивалентны в том смысле, что если система пар $\{v_r(x,t), u_r(x,t)\}$, $r = \overline{1, N}$, является решением задачи (7)–(10), то система троек $\{\lambda_r(x) = v_r(x, (r-1)h), \tilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - v_r(x, (r-1)h), u_r(x,t)\}$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (11)–(15),

и наоборот — если $\{\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x, t), u_r(x, t)\}$, $r = \overline{1, N}$, — решение задачи (11)–(15), то система $\{\lambda_r(x) + \tilde{v}_r(x, t), u_r(x, t)\}$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (7)–(10).

Задача (11), (12) при фиксированных $\lambda_r(x), u_r(x, t)$ является однопараметрическим семейством задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in [0, \omega]$ и эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$\tilde{v}_r(x, t) = \int_{(r-1)h}^t A(x, \tau) \tilde{v}_r(x, \tau) d\tau + \int_{(r-1)h}^t A(x, \tau) d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int_{(r-1)h}^t [C(x, \tau) u_r(x, \tau) + f(x, \tau)] d\tau. \quad (16)$$

Вместо $\tilde{v}_r(x, t)$ подставим соответствующую правую часть (16) и, повторив этот процесс $v(v = 1, 2, \dots)$ раз, получим:

$$\tilde{v}_r(x, t) = D_{vr}(x, t) \lambda_r(x) + F_{vr}(x, t, u_r) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}_r), \quad r = \overline{1, N}, \quad (17)$$

$$\text{где } D_{vr}(x, t) = \sum_{j=0}^{v-1} \int_{(r-1)h}^t A(x, \tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_j} A(x, \tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1,$$

$$F_{vr}(x, t, w_r, u_r) = \int_{(r-1)h}^t [C(x, \tau_1) u_r(x, \tau_1) + f(x, \tau_1)] d\tau_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{v-1} \int_{(r-1)h}^t A(x, \tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(x, \tau_j) \int_{(r-1)h}^{\tau_j} [C(x, \tau_{j+1}) u_r(x, \tau_{j+1}) + f(x, \tau_{j+1})] d\tau_{j+1} d\tau_j \dots d\tau_1,$$

$$G_{vr}(x, t, \tilde{v}_r) = \int_{(r-1)h}^t A(x, \tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{v-2}} A(x, \tau_{v-1}) \int_{(r-1)h}^{\tau_{v-1}} A(x, \tau_v) \tilde{v}_r(x, \tau_v) d\tau_v d\tau_{v-1} \dots d\tau_1, \tau_0 = t, r = \overline{1, N}.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow rh - 0$, в (17) находим $\lim_{t \rightarrow rh - 0} \tilde{v}_r(x, t) = \tilde{v}_r(x, t)$, $r = \overline{1, N}$, $x \in [0, \omega]$, подставляя их в (13), (14), для неизвестных функций $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N}$, получим систему функциональных уравнений:

$$Q_v(x, h) \lambda(x) = -F_v(x, h, u) - G_v(x, h, \tilde{v}). \quad (18)$$

Здесь

$$Q_v(h, x) = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & -[I + D_{vN}(x, Nh)] \\ I + D_{v1}(x, h) & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{v2}(x, 2h) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I + D_{v, N-1}(x, (N-1)h) & -I \end{bmatrix},$$

$$F_v(x, h, u) = (-F_{vN}(x, Nh, u_N), F_{v1}(x, h, u_1), \dots, F_{v, N-1}(x, (N-1)h, u_{N-1})),$$

$$G_v(x, h, \tilde{v}) = (-G_{vN}(x, Nh, \tilde{v}_N), G_{v1}(x, h, \tilde{v}_1), \dots, G_{v, N-1}(x, (N-1)h, \tilde{v}_{N-1})),$$

где I — единичная матрица размерности n . Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x, t), u_r(x, t)\}$, $r = \overline{1, N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (18), (17) и (15).

Предполагая обратимость матрицы $Q_v(x, h)$ при всех $x \in [0, \omega]$, из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x, t) = 0$, $u_r(x, t) = \psi(t)$, находим $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x), \dots, \lambda_N^{(0)}(x))'$:

$$\lambda^{(0)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \{F_v(x, h, \psi) + G_v(x, h, 0)\}.$$

Используя уравнение (17), при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ найдем функции $\{\tilde{v}_r^{(0)}(x, t)\}$, $r = \overline{1, N}$, т.е.

$$\tilde{v}_r^{(0)}(x, t) = D_{vr}(x, t) \lambda_r^{(0)}(x) + F_{vr}(x, t, \psi) + G_{vr}(x, t, 0).$$

Функции $u_r^{(0)}(x, t), r = \overline{1, N}$, определяются из соотношений

$$u_r^{(0)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r^{(0)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi, (x, t) \in \Omega_r.$$

За начальное приближение задачи (11)–(15) возьмем систему $(\lambda_r^{(0)}(x), \tilde{v}_r^{(0)}(x, t), u_r^{(0)}(x, t))$, $r = \overline{1, N}$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. А) Предполагая, что $u_r(x, t) = u_r^{(0)}(x, t)$, $r = \overline{1, N}$, первые приближения по $\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x, t)$ находим решая задачу (11)–(14). Взяв $\lambda^{(1,0)}(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tilde{v}_r^{(1,0)}(x, t) = \tilde{v}_r^{(0)}(x, t)$, систему пар $\{\lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(1)}(x, t)\}$, $r = \overline{1, N}$, найдем как предел последовательности $\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)$, определяемый следующим способом:

Шаг 1.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_v(x, h)$ при всех $x \in [0, \omega]$, из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x, t) = \tilde{v}_r^{(1,0)}(x, t)$, находим $\lambda^{(1,1)}(x) = (\lambda_1^{(1,1)}(x), \lambda_2^{(1,1)}(x), \dots, \lambda_N^{(1,1)}(x))'$:

$$\lambda^{(1,1)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \{F_v(x, h, u^{(0)}) + G_v(x, h, \tilde{v}^{(1,0)})\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(1,1)}(x), r = \overline{1, N}$, в (17) находим:

$$\tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r^{(1,1)}(x) + F_{vr}(x, t, u^{(0)}) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}^{(1,0)}).$$

Шаг 1.2. Из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x, t) = \tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t)$, определяем:

$$\lambda^{(1,2)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \{F_v(x, h, u^{(0)}) + G_v(x, h, \tilde{v}^{(1,1)})\}.$$

Вновь используя выражение (17), найдем функции $\{\tilde{v}_r^{(1,2)}(x, t)\}, r = \overline{1, N}$:

$$\tilde{v}_r^{(1,2)}(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r^{(1,2)}(x) + F_{vr}(x, t, u^{(0)}) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}^{(1,1)}).$$

На $(1, m)$ -м шаге получаем систему пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)\}, r = \overline{1, N}$. Предположим, что решение задачи (11)–(14) — последовательность систем пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)\}$ — определено и при $m \rightarrow \infty$ сходится к непрерывным, соответственно на $x \in [0, \omega], (x, t) \in \Omega_r$, функциям $\lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(1)}(x, t), r = \overline{1, N}$.

В) Функции $u_r^{(1)}(x, t), r = \overline{1, N}$, определяются из соотношений

$$u_r^{(1)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r^{(1)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi, (x, t) \in \Omega_r.$$

Шаг 2. А) Предполагая, что $u_r(x, t) = u_r^{(1)}(x, t), r = \overline{1, N}$, вторые приближения по $\lambda_r(x), \tilde{v}_r(x, t)$ находим, решая задачу (11)–(14). Взяв $\lambda^{(2,0)}(x) = \lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(2,0)}(x, t) = \tilde{v}_r^{(1)}(x, t)$, систему пар $\{\lambda_r^{(2)}(x), \tilde{v}_r^{(2)}(x, t)\}, r = \overline{1, N}$, найдем как предел последовательности $\lambda_r^{(2,m)}(x), \tilde{v}_r^{(2,m)}(x, t)$, определяемый следующим способом:

Шаг 2.1. Предполагая обратимость матрицы $Q_v(x, h)$ при всех $x \in [0, \omega]$, из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x, t) = \tilde{v}_r^{(2,0)}(x, t)$, находим $\lambda^{(2,1)}(x) = (\lambda_1^{(2,1)}(x), \lambda_2^{(2,1)}(x), \dots, \lambda_N^{(2,1)}(x))'$:

$$\lambda^{(2,1)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \{F_v(x, h, u^{(1)}) + G_v(x, h, \tilde{v}^{(2,0)})\}.$$

Подставив найденные $\lambda_r^{(2,1)}(x), r = \overline{1, N}$, в (17), находим:

$$\tilde{v}_r^{(2,1)}(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r^{(2,1)}(x) + F_{vr}(x, t, u^{(1)}) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}^{(2,0)}).$$

Шаг 2.2. Из уравнения (18), где $\tilde{v}_r(x, t) = \tilde{v}_r^{(2,1)}(x, t)$, определяем:

$$\lambda^{(2,2)}(x) = -[Q_v(x, h)]^{-1} \left\{ F_v(x, h, u^{(1)}) + G_v(x, h, \tilde{v}^{(2,1)}) \right\}.$$

Вновь используя выражение (17), найдем функции $\{\tilde{v}_r^{(2,2)}(x, t)\}, r = \overline{1, N}$:

$$\tilde{v}_r^{(2,2)}(x, t) = D_{vr}(x, t)\lambda_r^{(2,2)}(x) + F_{vr}(x, t, u^{(1)}) + G_{vr}(x, t, \tilde{v}^{(2,1)}).$$

На $(2, m)$ -м шаге получаем систему пар $\{\lambda_r^{(2,m)}(x), \tilde{v}_r^{(2,m)}(x, t)\}, r = \overline{1, N}$. Предположим, что решение задачи (11)–(14) — последовательность системы пар $\{\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)\}$ — определено и при $m \rightarrow \infty$ сходится к непрерывным, соответственно на $x \in [0, \omega], (x, t) \in \Omega_r$, функциям $\lambda_r^{(2)}(x), \tilde{v}_r^{(2)}(x, t), r = \overline{1, N}$.

В) Функции $u_r^{(2)}(x, t), r = \overline{1, N}$, определяются из соотношений

$$u_r^{(2)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x \tilde{v}_r^{(2)}(\xi, t) d\xi + \int_0^x \lambda_r^{(2)}(\xi) d\xi, (x, t) \in \Omega_r.$$

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость и сходимость предложенного алгоритма, а также однозначную разрешимость задачи (11)–(15).

Теорема 1. Пусть при некоторых $h > 0: Nh = T, N = 1, 2, \dots$ и $v, v = 1, 2, \dots, (nN \times nN)$ — матрица $Q_v(h, x)$ обратима при всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства:

$$1) \left\| [Q_v(h, x)]^{-1} \right\| \leq \gamma_v(h, x);$$

$$2) q_v(h, x) = \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \left[1 + \gamma_v(x, h) \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \right] \leq \mu < 1,$$

Тогда существует единственное решение задачи (11)–(15) и справедливы оценки

$$a) \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^*(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| + \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^*(x, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x, t) \right\| \leq$$

$$\leq a_0(x) \sum_{j=k-1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\int_0^x a_0(\xi) d\xi \right)^j \int_0^x a_1(\xi) d\xi \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\};$$

$$б) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| u_r^*(x, t) - u_r^{(k)}(x, t) \right\| \leq \int_0^x \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^*(\xi) - \lambda_r^{(k)}(\xi) \right\| + \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^*(\xi, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(\xi, t) \right\| d\xi,$$

$$k = 1, 2, \dots, \alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(x, t)\|, \sigma(x) = \max_{t \in [0, T]} \|C(x, t)\|, a_0(x) = \frac{[b_1(x) + b_3(x)]\sigma(x)}{1 - q_v(x, h)},$$

$$a_1(x) = \frac{\gamma_v(x, h)}{1 - q_v(x, h)} \left[1 + \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \right] \times$$

$$\times \left([b_1(x) + b_3(x)]\sigma(x) \int_0^x \{b_1(\xi) + b_3(\xi)\} b_2(\xi) d\xi + b_3(x) b_2(x) \left[q_v(x, h) + \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \right] \right),$$

$$b_1(x) = \gamma_v(x, h) h \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}, b_2(x) = \sigma(x) + 1, b_3(x) = \left[1 + \gamma_v(x, h) h \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \right] h \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Доказательство. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\|F_v(x, h, u)\| \leq h \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left[\sigma(x) \|u_r(x, t)\| + \|f(x, t)\| \right],$$

$$\|G_v(x, h, \tilde{v})\| \leq \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r(x, t)\|, \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|D_{vr}(x, t)\| \leq \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Из нулевого шага алгоритма вытекают оценки:

$$\max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| \leq \gamma_v(x, h) h \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \sup_{t \in [0, T]} [\sigma(x) \|\psi(x)\| + \|f(x, t)\|] \leq b_1(x) b_2(x) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\},$$

$$\begin{aligned} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(0)}(x, t)\| &\leq h \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} b_2(x) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\} \leq \\ &\leq b_3(x) b_2(x) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|u_r^{(0)}(x, t) - \psi(t)\| \leq \int_0^x [b_1(\xi) + b_3(\xi)] b_2(\xi) d\xi \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\}.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(1,1)}(x) - \lambda_r^{(1,0)}(x)\| \leq \\ &\leq \gamma_v(x, h) h \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \sigma(x) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|u_r^{(0)}(x, t) - \psi(t)\| + \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(0)}(x, t)\|, \\ &\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1,0)}(x, t)\| \leq \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(1,1)}(x) - \lambda_r^{(1,0)}(x)\| + \\ &+ h \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \sigma(x) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|u_r^{(0)}(x, t) - \psi(t)\| + \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(0)}(x, t)\| \leq \\ &\leq b_3(x) \sigma(x) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|u_r^{(0)}(x, t) - \psi(t)\| + q_v(x, h) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(0)}(x, t)\|. \end{aligned}$$

Установим неравенство

$$\begin{aligned} \Delta^{(1,1)}(x) &= \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1,0)}(x, t)\| + \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(1,1)}(x) - \lambda_r^{(1,0)}(x)\| \leq \\ &\leq \sigma(x) [b_1(x) + b_3(x)] \int_0^x \{b_1(\xi) + b_3(\xi)\} b_2(\xi) d\xi \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\} + \\ &+ \left[q_v(x, h) + \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \right] b_3(x) b_2(x) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(1, m+1)}(x) - \lambda_r^{(1, m)}(x)\| \leq \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(1, m)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, m-1)}(x, t)\|, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(1, m+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, m)}(x, t)\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha(x)h)^j}{j!} \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(1, m+1)}(x) - \lambda_r^{(1, m)}(x)\| + \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(1, m)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, m-1)}(x, t)\| \leq \\ &\leq q_v(x, h) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{v}_r^{(1, m)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, m-1)}(x, t)\|. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу неравенства $q_v(x, h) < 1$ следует равномерная сходимость $v_r^{(1, m+1)}(x, t), (x, t) \in \Omega_r$ к $v_r^{(1)}(x, t)$ и сходимость последовательности систем функций $\lambda_r^{(1, m+1)}(x)$ к непрерывным на $(x) \in [0, \omega]$ функциям $\lambda_r^{(1)}(x)$ при всех $r = \overline{1, N}$:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(1, m+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, m)}(x, t) \right\| \leq \sum_{j=0}^m [q_v(x, h)]^j \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(1, 1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, 0)}(x, t) \right\| \\ & \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1, m+1)}(x) - \lambda_r^{(1, 0)}(x) \right\| \leq \\ & \leq \sum_{j=0}^m [q_v(x, h)]^j \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(1, 1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, 0)}(x, t) \right\| + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1, 1)}(x) - \lambda_r^{(1, 0)}(x) \right\| \\ & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(1, m+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, 0)}(x, t) \right\| + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1, m+1)}(x) - \lambda_r^{(1, 0)}(x) \right\| \leq \\ & \leq \sum_{j=0}^m [q_v(x, h)]^j \left\{ 1 + \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \right\} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(1, 1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, 0)}(x, t) \right\| + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1, 1)}(x) - \lambda_r^{(1, 0)}(x) \right\|. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим оценки:

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(x) &= \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(0)}(x, t) \right\| + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1)}(x) - \lambda_r^{(0)}(x) \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{1 - q_v(x, h)} \left\{ 1 + \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \right\} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(1, 1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(1, 0)}(x, t) \right\| + \\ & + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(1, 1)}(x) - \lambda_r^{(1, 0)}(x) \right\| \leq a_1(x) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|\mathcal{F}\|_0 \right\}. \\ & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| u_r^{(1)}(x, t) - u_r^{(0)}(x, t) \right\| \leq \int_0^x \Delta^{(1)}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Для систем разностей $\lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)$, $\tilde{v}_r^{(k+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x, t)$, $u_r^{(k+1)}(x, t) - u_r^{(k)}(x, t)$, $r = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \dots$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1, 1)}(x) - \lambda_r^{(k+1, 0)}(x) \right\| \leq \sigma(x) b_1(x) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| u_r^{(k)}(x, t) - u_r^{(k-1)}(x, t) \right\|, \\ & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1, 1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k+1, 0)}(x, t) \right\| \leq b_3(x) \sigma(x) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| u_r^{(k)}(x, t) - u_r^{(k-1)}(x, t) \right\|, \\ & \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1, m+1)}(x) - \lambda_r^{(k+1, m)}(x) \right\| \leq \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1, m)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k+1, m-1)}(x, t) \right\|, \\ & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1, m+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k+1, m)}(x, t) \right\| \leq \gamma_v(x, h) \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1, m)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k+1, m-1)}(x, t) \right\|. \\ & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1, m+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k+1, 0)}(x, t) \right\| \leq \sum_{j=0}^m [q_v(x, h)]^j \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1, 1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k+1, 0)}(x, t) \right\| \\ & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \lambda_r^{(k+1, m+1)}(x, t) - \lambda_r^{(k+1, 0)}(x, t) \right\| \leq \\ & \leq \sum_{j=0}^{m-1} [q_v(x, h)]^j \gamma_v(x, h) \frac{(\alpha(x)h)^v}{v!} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1, 1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k+1, 0)}(x, t) \right\| + \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1, 1)}(x) - \lambda_r^{(k+1, 0)}(x) \right\|. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим оценки:

$$\begin{aligned} & \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| \tilde{v}_r^{(k+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x, t) \right\| \leq \frac{b_3(x) \sigma(x)}{1 - q_v(x, h)} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| u_r^{(k)}(x, t) - u_r^{(k-1)}(x, t) \right\|, \\ & \max_{r=1, N} \left\| \lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x) \right\| \leq \frac{b_1(x) \sigma(x)}{1 - q_v(x, h)} \max_{r=1, N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \left\| u_r^{(k)}(x, t) - u_r^{(k-1)}(x, t) \right\|, \end{aligned}$$

$$\max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|u_r^{(k+1)}(x, t) - u_r^{(k)}(x, t)\| \leq \int_0^x \max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^{(k+1)}(\xi) - \lambda_r^{(k)}(\xi)\| d\xi + \int_0^x \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^{(k+1)}(\xi, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(\xi, t)\| d\xi.$$

Суммируя, соответственно, левые и правые части неравенств (21), (22), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta^{(k+1)}(x) &= \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^{(k+1)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x, t)\| + \max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^{(k+1)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\| \leq \\ &\leq \frac{[b_1(x) + b_3(x)]\sigma(x)}{1 - q_v(x, h)} \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|u_r^{(k)}(x, t) - u_r^{(k-1)}(x, t)\|, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|u_r^{(k+1)}(x, t) - u_r^{(k)}(x, t)\| \leq \int_0^x \Delta^{(k+1)}(\xi) d\xi. \quad (22)$$

Для функции $\Delta^{(k+1)}(x)$ на основе (21), (22) установим неравенство

$$\Delta^{(k+1)}(x) \leq a_0(x) \int_0^x \Delta^{(k)}(\xi) d\xi, \quad (23)$$

$$\Delta^{(k)}(x) \leq \frac{a_0(x)}{(k-1)!} \left(\int_0^x a_0(\xi) d\xi \right)^{k-1} \int_0^x \Delta^{(1)}(\xi) d\xi.$$

Установим неравенства

$$\begin{aligned} &\max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^{(k+p)}(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\| + \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^{(k+p)}(x, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(x, t)\| \leq \\ &\leq \Delta^{(k+p)}(x) + \Delta^{(k+p-1)}(x) + \dots + \Delta^{(1)}(x) \leq a_0(x) \sum_{j=k-1}^{k+p-2} \frac{1}{j!} \left(\int_0^x a_0(\xi) d\xi \right)^j \int_0^x \Delta^{(1)}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq a_0(x) \sum_{j=k-1}^{k+p-2} \frac{1}{j!} \left(\int_0^x a_0(\xi) d\xi \right)^j \int_0^x a_1(\xi) d\xi \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|u_r^{(k+p)}(x, t) - u_r^{(k)}(x, t)\| \leq \int_0^x \left\{ \max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^{(k+p)}(\xi) - \lambda_r^{(k)}(\xi)\| + \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^{(k+p)}(\xi, t) - \tilde{v}_r^{(k)}(\xi, t)\| \right\} d\xi.$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, для всех $(x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N}$, получим оценки теоремы 1.

Докажем единственность. Пусть существует $(\lambda_r^{**}(x), \tilde{v}_r^{**}(x, t), u_r^{**}(x, t)), r = \overline{1, N}$, другое решение краевой задачи — (11)–(15). Аналогично соотношению (23) для разностей $\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{**}(x), \tilde{v}_r^*(x, t) - \tilde{v}_r^{**}(x, t)$ для всех $(x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N}$, получим:

$$\begin{aligned} &\max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{**}(x)\| + \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^*(x, t) - \tilde{v}_r^{**}(x, t)\| \leq \\ &\leq a_0(x) \int_0^x \max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^*(\xi) - \lambda_r^{**}(\xi)\| + \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^*(\xi, t) - \tilde{v}_r^{**}(\xi, t)\| d\xi. \end{aligned}$$

С помощью неравенства Беллмана-Гронуолла [7] имеем

$$\max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{**}(x)\| + \max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^*(x, t) - \tilde{v}_r^{**}(x, t)\| = 0,$$

откуда вытекает, что $\tilde{v}_r^*(x, t) = \tilde{v}_r^{**}(x, t), \lambda_r^*(x) = \lambda_r^{**}(x), r = \overline{1, N}$. Из неравенства

$$\max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|u_r^*(x, t) - u_r^{**}(x, t)\| \leq \int_0^x \left(\max_{r=1, \overline{N}} \sup_{t \in \overline{[(r-1)h, rh]}} \|\tilde{v}_r^*(\xi, t) - \tilde{v}_r^{**}(\xi, t)\| + \max_{r=1, \overline{N}} \|\lambda_r^*(\xi) - \lambda_r^{**}(\xi)\| \right) d\xi$$

имеем $u_r^*(x, t) = u_r^{**}(x, t), r = \overline{1, N}$, для всех $(x, t) \in \Omega_r$. Теорема 1 доказана.

В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (11)–(15) из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение $u^*(x, t)$ и справедлива оценка

$$\max \left\{ \|u\|_0, \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_0 \right\} \leq M_\nu(x, h) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\},$$

где

$$M_\nu(x, h) = a_0(x) e^{\int_0^x a_0(\xi) d\xi} \int_0^x \max \{a_1(\xi), a_2(\xi)\} d\xi + \max \{a_1(x), a_2(x)\} + \\ + \max \{b_1(x) + b_3(x), \alpha(x)[b_1(x) + b_3(x)] + 1\} b_2(x).$$

Таким образом, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3).

References

1. *Cesari L.* Tr. International symposium on nonlinear fluctuations. — Vol. 1. — Kiev, 1963. — P. 440–457.
2. *Veivoda O et al.* Partial differential equations: Time-periodic solutions // *Alphen aan den Rijn*. — Sijthoff: Noordhoff, 1981. — 358 p.
3. *Ptashnik B.I.* The incorrect boundary problems for differential equations with quotient derivatives. — Kiev, 1984.
4. *Kiguradze T.I.* On periodic boundary problems for linear hyperbolic equations // *Differential equations*. — 1993. — Vol. 29. — № 2. — P. 281–297.
5. *Mitropoliskiy Yu.A., Homa G.P., Gromyak M.I.* The asymptotic methods of the study quasiwave equations of the hyperbolic type. — Kiev: Scientific idea, 1991. — 232 p.
6. *Asanova A.T., Dzhumabaev D.S.* One-valued solvability nonlocal boundary problems for systems of the hyperbolic equations. *The Differential equations*. 2003. — Vol. 39. — № 10. — P. 1343–1354.
7. *Trenogin V.A.* The functional analysis. — M.: Science, 1980.

УДК 517.956.4

О разрешимости некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности дробного порядка

On the solvability of some inverse problems for the heat equation of fractional order

Турметов Б.Х., Шиналиев К.М.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: turmetovbh@mail.ru)

Мақалада бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін кейбір сызықтық кері есептердің шешімділігі мәселесі қарастырылады. Теңдеудің шешімімен бірге оң жағындағы белгісіз функцияны табу қажет болады. Есептің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді.

In this paper we study the solvability of some linear inverse problems for differential equations of fractional order. In this paper, together with a solution of a equation it need to find a unknown right-hand side. The theorems of the existence and uniqueness of the solution of the problem are proved.

1. Введение.

При моделировании процессов определения температуры и плотности источников тепла по заданным начальной и конечной температурам возникают обратные задачи для уравнения теплопроводности. В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости некоторых обратных задач для дифференциального уравнения дробного порядка, обобщающие уравнению теплопроводности на дробные показатели операторов.

Пусть $0 < \alpha$ — некоторое действительное число. Для функции $g(t)$, заданной на интервале $(0, l)$, $l < \infty$, оператор интегрирования α -го порядка определяется равенством