

Многообразия m -групп

On varieties of m -groups

Зенков А.В.

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия (e-mail: alexey_zenkov@yahoo.com)

m -группа деп $(G, *)$ жұбын алайық, мұндағы G — l -группа, ал $*$ G екі автоморфизмнің ретін білдіреді. m -группа $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, * \rangle$ алгебралық сигнатуралар жүйесі ретінде анықтала алады және m -группалар осы сигнатурада көпбейнелілікті құратыны айқын. Барлық m -группа көпбейнелерінің M жиыны теоретикалық-жиынды енгізуге қатысты жартылай реттелген жиын болып табылады. Сонымен қатар M дегеніміз m -группа көпбейнелерінің айқын түрде анықталған қиылысу және бірігу амалдарына қатысты тор болады. Бұл макала m -группалардың M көпбейнелерінің тордағы кейінгі нәтижелеріне шолу болып табылады.

Recall that an m -group is a pair $(G, *)$, where G is an l -group and $*$ is a decreasing order two automorphism of G . An m -group can be regarded as an algebraic system of signature $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, * \rangle$ and it is obvious that the m -groups form a variety in this signature. The set M of varieties of all m -groups is a partially ordered set with respect to the set-theoretic inclusion. Moreover, M is a lattice with respect to the naturally defined operations of intersection and union of varieties of m -groups. This article is a survey of the recent results about the lattice of varieties of m -groups M .

1. Введение

Напомним [1], что m -группой называется алгебраическая система G сигнатуры

$$m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, * \rangle,$$

где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является решеточно-упорядоченной группой (l -группой) и одноместная операция $*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$\begin{aligned}(xy)_* &= x_* y_*, \\ (x_*)_* &= x, \\ (x \vee y)_* &= x_* \wedge y_*, \\ (x \wedge y)_* &= x_* \vee y_*.\end{aligned}$$

В дальнейшем m -группу G с фиксированным автоморфизмом $*$ записываем как пару $(G, *)$.

Пусть Ω — некоторое линейно упорядоченное множество. Через $\text{Aut}(\Omega)$ и $\text{Mon}(\Omega)$ обозначим группы (относительно суперпозиции) всех монотонно возрастающих и монотонных подстановок линейно-упорядоченного множества Ω соответственно. Очевидно, что

$$\text{Aut}(\Omega) \subseteq \text{Mon}(\Omega).$$

Пусть

$$a \in \text{Mon}(\Omega) \setminus \text{Aut}(\Omega) \text{ и } a^2 = e.$$

Тогда будем называть a — реверсивным автоморфизмом 2-го порядка Ω . Следуя [1], будем говорить, что m -группа $(G, *)$ представима порядковыми подстановками линейно-упорядоченного множества Ω , если $G \subseteq \text{Aut}(\Omega)$ и $g_* = aga$ для любого $g \in G$, где a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω . Этот факт записываем в виде (G, Ω, a) .

Пример. Пусть $\Omega = \mathbf{R}$ — естественно линейно-упорядоченное множество действительных чисел. Определим

$$(x)a = -x + 5 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Тогда $(\text{Aut}(\mathbf{R}), \mathbf{R}, a)$ есть m -группа.

М.Giraudet и F.Lucas [2] доказали следующую теорему.

Теорема 1.1. Всякая m -группа $(G, *)$ имеет точное представление порядковыми подстановками некоторого линейно-упорядоченного множества Ω .

Класс M всех m -групп образует многообразие сигнатуры m . Множество всех многообразий m -групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m -групп. Пусть (G, \leq) — некоторая решеточно-упорядоченная (l -группа) группа.

Через G^* обозначим l -группу, полученную из G путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $G \times G^*$ является l -группой. Пусть $(x, y) \in G \times G^*$.

Определим отображение

$$Exch: G \times G^* \rightarrow G \times G^*$$

по правилу

$$(x, y)Exch = (y, x).$$

Тогда пара $(G \times G^*, Exch)$ будет m -группой.

М.Giraudet и J.Rachunek в [1], в частности, показали, что многообразие всех абелевых m -групп A порождается $(Z \times Z^*, Exch)$, где Z — естественно упорядоченная аддитивная группа целых чисел. Здесь же отметим, что многообразие m -групп I , определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$, порождается m -группой (Z, Inv) , где

$$(z)Inv = -z \quad \forall z \in Z.$$

2. Многообразия m -групп

Как уже упоминалось выше, множество всех многообразий m -групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения и, более того, M есть решетка.

Тривиальное многообразие m -групп E является наименьшим элементом M . Будем говорить, что многообразие m -групп X является накрытием многообразия m -групп Y (X покрывает Y), если $Y \subseteq X$ и для любого многообразия m -групп Z такого, что $Y \subseteq Z \subseteq X$, выполнено $Z = Y$ либо $Z = X$.

Теорема 2.1 [1].

- 1) Многообразие m -групп I является накрытием E ,
- 2) Многообразие всех абелевых m -групп A покрывает I .

Рассмотрим группу

$$S_2 = \langle a_0, a_1, b \mid [a_0, a_1] = e, a_0^b = a_1, a_1^b = a_0 \rangle.$$

Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде

$$g = b^k a_0^m a_1^n, \quad k, m, n \in Z.$$

Относительно лексикографического порядка, т.е.

$$g \geq e \Leftrightarrow k > 0$$

или

$$k = 0, m \geq 0, n \geq 0,$$

группа S_2 будет решеточно-упорядоченной.

Определим отображение

$$\varphi: S_2 \rightarrow S_2$$

по правилу

$$(g)\varphi = b^{-k} a_0^{-m} a_1^{-n}.$$

Тогда (S_2, φ) будет m -группой.

Через S обозначим многообразие m -групп, порожденное (S_2, φ) . Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2 [3, 4]. Многообразие S является единственным неабелевым накрытием многообразия m -групп I .

Пусть p — произвольное простое число.

Рассмотрим группу

$$S_p = \langle a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, b \mid [a_i, a_j] = e, a_i^b = a_{i+1}, a_{p-1}^b = a_0 \rangle.$$

Относительно лексикографического порядка группа S_p является решеточно-упорядоченной. На порождающих элементах определим отображение

$$\begin{aligned} \varphi_p: (a_i) \varphi_p &= a_k^{-1}, \\ k &\equiv p - (i + 1) \pmod{p}, (b) \varphi_p = b^{-1}. \end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что φ_p есть автоморфизм второго порядка группы S_p и антиизоморфизм решетки S_p , т.е. для каждого p пара (S_p, φ_p) будет m -группой.

Теорема 2.3 [5]. Пусть S_p — многообразие m -групп, порожденное (S_p, φ_p) . Тогда:

- 1) S_p — накрытие многообразия всех абелевых m -групп A для каждого p ;
- 2) $S_p \neq S_q$ при $p \neq q$.

М.Е.Huss, N.R.Reily [6] на решетке многообразий l -групп L определили автоморфизм второго порядка φ . Напомним определение этого автоморфизма.

Рассмотрим произвольную l -группу (G, \leq) .

Через G^* обозначим l -группу, полученную из исходной группы путем обращения порядка. Далее, если $V = \{G_i \mid i \in I\}$ — некоторое многообразие l -групп, то тогда

$$\varphi(V) = \{G_i^* \mid i \in I\}.$$

Если верно равенство $\varphi(V) = V$, то тогда многообразие V называется реверсивным. Несложно показать, что система тождеств (сигнатуры l), определяющая реверсивное многообразие, задает некоторое многообразие m -групп.

В теории многообразий l -групп важную роль играет многообразие l -групп N с субнормальными скачками. Как показал W.Ch.Holland [7], это многообразие замечательно тем, что оно является наибольшим нетривиальным элементом решетки многообразий l -групп L .

Известно [6], что многообразие N реверсивно. Таким образом, тождество

$$(x \vee e)^{-1} (y \vee e)^{-1} (x \vee e)^2 (y \vee e)^2 \wedge e = e$$

определяет многообразие m -групп N_m с субнормальными скачками. Верна следующая

Теорема 2.4 [8]. Многообразие m -групп N_m с субнормальными скачками является наибольшим нетривиальным элементом решетки многообразий m -групп M .

Известно (см., напр., [6]), что многообразие всех o -аппроксимируемых l -групп R реверсивно. Следовательно, тождество

$$(y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y \wedge x) \vee e = e,$$

определяющее R , задает и многообразие R_m всех o -аппроксимируемых m -групп. Через M_{R_m} обозначим решетку o -аппроксимируемых многообразий m -групп.

Теорема 2.5. [3].

- 1) В решетке M_{R_m} имеется континуум многообразий, каждое из которых в ней имеет континуум накрытий,
- 2) существует o -аппроксимируемое многообразие m -групп, которое не имеет накрытий в решетке M_{R_m} ,
- 3) существует o -аппроксимируемое многообразие m -групп без независимого базиса тождеств.

References

1. Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice — ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. — 1999. — Vol. 49. — № 124. — P.743–766.
2. Giraudet M., Lucas F. Groupes a' motie' ordonne's, Fundam. Math. — 1991. — Vol. 139. — № 2. — P. 75–89.

3. Zenkov A.V. Covers in the lattice of varieties of m -groups // Siberian Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 47. — № 1. — P. 58–63.
4. Zenkov A.V. The minimal varieties of m -groups // Siberian Mathematical Journal. — 2009. — Vol. 50. — № 6. — P. 1035–1038.
5. Isaeva O.V. Covers in the lattice of varieties of m -groups // Algebra and Model theory — 4. Novosibirsk: NSTU. — 2003. — P. 35–43.
6. Huss M.E., Reily N.R. On reversing the order of lattice — ordered group // J. Algebra. — 1984. — Vol. 91. — P. 176–191.
7. Holland W.Ch. The largest proper variety of lattice — ordered groups // Proc. Am. Math. Soc. — 1976. — Vol. 57. — № 1. — P. 25–28.
8. Kopytov V.M., Rachunek J. The largest proper variety of m -groups // Algebra and logic. — 2003. — Vol. 42. — № 5. — P. 624–635.

УДК 517.956.3+519.642.5

Обратная задача геоэлектрики в дискретной постановке

Inverse problem geoelectrics in discrete formulation

Шолпанбаев Б.Б.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы (e-mail: Bahtygerey@mail.ru)

Мақалада Максвелл тендеулер жүйесінің (толқындық түрі) кері коэффициенттік есебі қарастырылды. Оське параллель жер бетінде орналасқан, бірден қосылған және арнайы берілген шеткері токқа байланысты Максвелл тендеулер жүйесі электр өрісінің бір компонентіне байланысты екі өлшемді есебіне келтірілген. Дискреттік қойылымдағы геоэлектрика тендеуінің кері коэффициенттік есебін шешудің тиімділеу тәсілі берілген. Дискреттік деңгейдегі функционал градиенті тұрғызылған. Функционалды минимизациялау үшін жылдам түсу әдісі қолданылған.

In this paper we consider the inverse coefficient problem for Maxwell's equations (wave version). If the special task of the external current, corresponding to instantaneous switching, parallel to the axis centered on the earth's surface the system of Maxwell's equations is reduced to two-dimensional problem with respect to one component of the electric field. We consider the optimization method for solving the inverse conductivity problem for the equation of geoelectrics in discrete formulation. A gradient of the functional on a discrete level is constructed. To minimize the functional we use the method of steepest descent.

Постановка основной задачи. Сформулируем постановку прямой и обратной задач для системы уравнений Максвелла [1–2]:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E - \operatorname{rot} H + \sigma E + j^{cm} = 0, & x_3 \neq 0, & (x_1, x_2, x_3) \in R^3. \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{rot} E = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $E = (E_1, E_2, E_3)^T$, $H = (H_1, H_2, H_3)^T$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ε , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды; σ — проводимость среды; j^{cm} — плотность сторонних токов.

Рассматривается геофизическая модель, в которой поверхность Земли считается плоской. Физическое пространство R^3 переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ разобьем плоскостью $x_3 = 0$ на два полупространства:

$$\begin{aligned} R_-^3 &= \{x \in R^3 \mid x_3 < 0\} && \text{(воздух)}, \\ R_+^3 &= \{x \in R^3 \mid x_3 > 0\} && \text{(земля)}. \end{aligned}$$

Полагаем в R_-^3 параметры ε , μ , σ постоянными, а в R_+^3 — гладкими функциями до границы $x_3 = 0$.