

Б.Т.Калимбетов¹, Н.С.Иманбаев¹, А.Д.Ниязымбетов²

¹Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан;

²Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент (E-mail ascar_n@mail.ru)

Алгоритм метода регуляризации для сингулярно возмущенной задачи с нестабильным значением ядра интегрального оператора

В статье изложен алгоритм построения асимптотического решения начальной задачи для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра с быстро убывающим ядром в случае, когда интегральный оператор имеет особенность первого порядка в начальной точке рассматриваемого отрезка времени. Для регуляризации интегрального оператора использована модифицированная операция интегрирования по частям. Построена асимптотика решений первого порядка исходной задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, интегральный оператор, регуляризация задачи, асимптотическое решение, формальный ряд.

Рассмотрим следующую интегро-дифференциальную задачу:

$$L_\varepsilon y(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a^2(x)y + \int_0^x e^{-\frac{\gamma(x^2-s^2)}{2\varepsilon}} k(x,s)y(s, \varepsilon) ds = h(x); \quad (1)$$

$$y(0, \varepsilon) = y^0; \quad y'(0, \varepsilon) = z^0; \quad 0 \leq s \leq x \leq T; \quad T > 0,$$

где $a(x) > 0 \quad \forall x \in [0, T]$, $a(x), h(x) \in C^\infty[0, T]$, $k(x, s) \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega = \{(x, s): 0 \leq s \leq x \leq T\}$, $\gamma > 0$ — постоянная; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; y^0, z^0 — постоянные.

Особенностью уравнения (1) является то, что стоящая в нем экспонента $\exp\left[-\frac{\gamma(x^2-s^2)}{2\varepsilon}\right]$ порождена нестабильным спектральным значением $\lambda_3(x) = -\gamma x$ ядра интегрального оператора.

Введем регуляризирующие переменные [1]:

$$\tau_1 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(s) ds \equiv \varphi_1(x, \varepsilon), \quad \tau_2 = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \int_0^x s ds \equiv \varphi_2(x, \varepsilon), \quad \sigma = \exp\left\{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}\right\} \int_0^x \exp\left\{\frac{\gamma s^2}{2\varepsilon}\right\} ds \equiv \varphi_3(x, \varepsilon).$$

Изучим функцию $\tilde{y}(x, \tau, \sigma, \varepsilon)$, такую что ее сужение при $\tau = \varphi, \sigma = \varphi$ дает нам точное решение задачи (1), то есть

$$\tilde{y}(x, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon) \equiv y(x, \varepsilon). \quad (2)$$

Дифференцируя $\tilde{y}(x, \tau, \sigma, \varepsilon)|_{\substack{\tau=\varphi \\ \sigma=\varphi}}$ по x , будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2 \tilde{y}(x, \tau, \sigma, \varepsilon)}{dx^2} &= \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} + \varepsilon a(x) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x \partial \tau_1} - \varepsilon \gamma x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x \partial \tau_2} + \varepsilon(-\gamma x \sigma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x \partial \sigma} + \varepsilon a(x) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x \partial \tau_1} - \\ &- a^2(x) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_1^2} - a(x) \gamma x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + a(x)(\varepsilon - \gamma x \sigma) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_1 \partial \sigma} - \varepsilon \gamma x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x \partial \tau_2} - a(x) \gamma x \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} - \gamma^2 x^2 \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_2^2} - \\ &- \gamma x(-\gamma x \sigma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_2 \partial \sigma} + \varepsilon(-\gamma x \sigma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x \partial \sigma} + a(x)(-\gamma x \sigma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_1 \partial \sigma} - \gamma x(-\gamma x \sigma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tau_2 \partial \sigma}. \end{aligned}$$

Для функции (2) можно поставить следующую расширенную задачу:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(x, \tau, \sigma, \varepsilon) &\equiv (L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2) \tilde{y} + \int_0^x e^{-\frac{\gamma(x^2-s^2)}{2\varepsilon}} k(x,s) \tilde{y}(s, \varphi_1(s, \varepsilon), \varphi_2(s, \varepsilon), \varphi_3(s, \varepsilon), \varepsilon) ds = h(x); \\ \tilde{y}(0, 0, 0, 0, \varepsilon) &= y^0; \quad l\tilde{y} \equiv \left[\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + a(x) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_1} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \sigma} \right]_{\substack{x=0 \\ \tau=0 \\ \sigma=0}} = z^0, \end{aligned} \quad (3)$$

где операторы L_0, L_1, L_2 имеют вид

$$L_0 \equiv a^2(x) \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} - 2a(x)\gamma x \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + 2a(x)\gamma x \sigma \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \sigma} - \gamma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} - 2\gamma^2 x^2 \sigma \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial \sigma} + \gamma^2 x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + a^2(x);$$

$$L_1 \equiv 2a(x) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau_1} - 2\gamma x \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau_2} - 2\gamma x \sigma \frac{\partial^2}{\partial x \partial \sigma} - \gamma \frac{\partial}{\partial \tau_2} + 2a(x) \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \sigma} - 2\gamma x \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial \sigma} - 2\gamma x \sigma \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + a'(x) \frac{\partial}{\partial \tau_1} - \gamma \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma};$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}.$$

Регуляризация задачи (3) производится следующим образом. Подставим формальный ряд

$$\tilde{y}(x, \tau, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x, \tau, \sigma), \tag{4}$$

где $y_k(x, \tau, \sigma) = c_0^{(k)}(x) + c_1^{(k)}(x)e^{-i\tau_1} + c_2^{(k)}(x)e^{i\tau_1} + c_3^{(k)}(x)e^{\tau_2} + c_4^{(k)}(x)\sigma,$ (5)

$c_j^{(k)}(x) \in C^\infty[0, T], j = \overline{0, 4},$ в интегральный член задачи (3). Для каждого слагаемого суммы (5) получим интегралы

$$I_0(x, \varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}} \int_0^x e^{\frac{\gamma s^2}{2\varepsilon}} \cdot k_0(x, s) ds; \quad I_1(x, \varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}} \int_0^x e^{\frac{\gamma s^2}{2\varepsilon} - \frac{i}{\varepsilon} \int_0^s a(\theta) d\theta} k_1(x, s) ds;$$

$$I_2(x, \varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}} \int_0^x k_2(x, s) e^{\frac{\gamma s^2}{2\varepsilon} + \frac{i}{\varepsilon} \int_0^s a(\theta) d\theta} ds; \quad I_3(x, \varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}} \int_0^x k_3(x, s) ds;$$

$$I_4(x, \varepsilon) = e^{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}} \int_0^x k_4(x, s) \left(\int_0^s e^{\frac{\gamma \theta^2}{2\varepsilon}} d\theta \right) ds,$$

где $k_j(x, s) \equiv k(x, s)c_j(s), j = \overline{0, 4}.$

Интегрируя эти интегралы по частям, получим следующие ряды:

$$I_0(x, \varepsilon) \equiv I_0(x, \tau, \sigma, \varepsilon) = k_0(x, 0)\sigma + \frac{\varepsilon}{\gamma} \left[k_0^{(1)}(x, x) - k_0^{(1)}(x, 0)e^{\tau_2} \right] - \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} k_0^{(1)}(x, 0)\sigma +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[u_0^{(k)}(x) + u_2^{(k)}(x)e^{\tau_2} + u_3^{(k)}(x)\sigma \right],$$

где $k_0^{(1)}(x, \varepsilon) = \frac{k_0(x, s) - k_0(x, 0)}{s};$

$$I_1(x, \varepsilon) \equiv I_1(x, \tau, \sigma, \varepsilon) = \varepsilon \frac{k_1(x, x)}{\gamma x - ia(x)} e^{-i\tau_1} + \varepsilon i \frac{k_1(x, 0)}{a(0)} e^{\tau_2} + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left[w_1^{(k)}(x)e^{-i\tau_1} + w_2^{(k)}(x)e^{\tau_2} \right];$$

$$I_2(x, \varepsilon) \equiv I_2(x, \tau, \sigma, \varepsilon) = \varepsilon \frac{k_2(x, x)}{\gamma x + ia(x)} e^{i\tau_1} - \varepsilon i \frac{k_2(x, 0)}{a(0)} e^{\tau_2} + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left[w_3^{(k)}(x)e^{i\tau_1} + w_4^{(k)}(x)e^{\tau_2} \right];$$

$$I_4(x, \varepsilon) \equiv I_4(x, \tau, \sigma, \varepsilon) = \hat{k}_4(x, x)\sigma - \hat{k}_4(x, 0)\sigma + \frac{\varepsilon}{\gamma} \cdot k_4^{(1)}(x, 0)e^{\tau_2} - \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} k_4^{(1)}(x, 0)\sigma + \frac{\varepsilon}{\gamma} k_4^{(1)}(x, s) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left[\vartheta_0^{(k)}(x) + \vartheta_2^{(k)}(x)e^{\tau_2} + \vartheta_3^{(k)}(x)\sigma \right],$$

где $\hat{k}_4(x, \varepsilon) \equiv \int_0^s k(x, \theta) y_4(\theta) d\theta, \quad \hat{k}_4^{(1)} = \frac{\hat{k}_4(x, s) - \hat{k}_4(x, 0)}{s}.$

Затем получим следующую расширенную задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(x, \tau, \sigma, \varepsilon) \equiv (L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2) \tilde{y} + k\tilde{y} = h(x), \quad \tilde{y}(0, 0, 0, 0) = y^0, \quad \tilde{ly} = z^0, \tag{6}$$

где оператор K сопоставляет каждому формальному ряду (4) с коэффициентами $\tilde{y}_k(x, \tau, \sigma)$ из пространства U функций вида (5) формальный ряд

$$e^{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}} \int_0^x e^{\frac{\gamma s^2}{2\varepsilon}} k(x, s) \tilde{y}(s, \varphi(s, \varepsilon), \varepsilon) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{k+j} \left[z_{0j}^{(k)}(x) + z_{1j}^{(k)}(x)e^{-i\tau_1} + z_{2j}^{(k)}(x)e^{i\tau_1} + z_{3j}^{(k)}(x)e^{\tau_2} + z_{4j}^{(k)}(x)\sigma \right].$$

Подставим ряд (4) в задачу (6) и произведем приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε . Получим следующие итерационные задачи:

$$L_0 y_0 + k_0 y_0 = h(x), \quad y(0, 0, 0) = y^0, \quad l y_0 \equiv a(x) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} \Big|_{\substack{x=0 \\ \tau=0 \\ \sigma=0}} = z^0; \quad (\varepsilon^0)$$

$$L_0 y_1 + k_0 y_1 = -L_1 y_0 - k_1 y_0, \quad y(0, 0, 0) = 0, \quad l y_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial \sigma} \Big|_{\substack{x=0 \\ \tau=0 \\ \sigma=0}}, \quad (\varepsilon^1)$$

где k_j — операторы, описанные выше.

Определяем решение задачи (ε^0). Вычисляя $y_0(x, \tau, \sigma) \in U$ в виде суммы

$$y_0(x, \tau, \sigma) = c_1^{(0)}(x)e^{-i\tau_1} + c_2^{(0)}(x)e^{+i\tau_1} + c_3^{(0)}(x)e^{\tau_2} + c_4^{(0)}(x)\sigma + c_0^{(0)}(x) \quad (7)$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} L_0 e^{\pm i\tau_1} &\equiv 0, & L_0(c_3^{(0)}(x)e^{\tau_2}) &\equiv [a^2(x) - \gamma^2 x^2]c_3^{(0)}(x)e^{\tau_2}; \\ L_0(c_4^{(0)}(x)\sigma) &\equiv a^2(x)c_4^{(0)}(x)\sigma, & L(c_0^{(0)}(x)) &\equiv a^2(x)c_0^{(0)}(x); \\ K_0 y_0 &\equiv k(x, 0)c_0^{(0)}(x)\sigma + \sigma \int_0^x k(x, s)c_4^{(0)}(s)ds + e^{\tau_2} \int_0^x k(x, s)c_3^{(0)}(s)ds, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} L_0 y_0 + K_0 y_0 &\equiv [a^2(x)c_3^{(0)}(x) - \gamma^2 x^2 c_3^{(0)}(x) + \int_0^x k(x, s)c_3^{(0)}(s)ds]e^{\tau_2} + \\ &+ [a^2(x)c_4^{(0)}(x) + k(x, 0)c_0^{(0)}(0) + \int_0^x k(x, s)c_4^{(0)}(s)ds]\sigma + a^2(x)c_0^{(0)}(x) = h(x). \end{aligned}$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при e^{τ_2} , σ , получим уравнения

$$\begin{aligned} [a^2(x) - \gamma^2 x^2]c_3^{(0)}(x) + \int_0^x k(x, s)c_3^{(0)}(s)ds &= 0; \\ a^2(x)c_4^{(0)}(x) + \int_0^x k(x, s)c_4^{(0)}(s)ds &= -k(x, 0)c_0^{(0)}(0); \\ a^2(x)c_0^{(0)}(x) &= h(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Первое уравнение (8) имеет тривиальное решение $c_3^{(0)}(x) \equiv 0$, третье — единственное — $c_0^{(0)}(x) = h(x) / a^2(x)$.

Второе уравнение есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром

$k_0(x, s) = \frac{k(x, s)}{a^2(x)} \in C^\infty(\Omega)$ и свободным членом $\frac{k(x, 0) \cdot h(x)}{a^4(x)} \in C^\infty(\Omega)$. Известно, что такое уравнение однозначно разрешимо в $C^\infty[0, T]$.

Решение уравнения (ε^0) записывается в виде

$$y_0(x, \tau, \sigma) = c_1^{(0)}(x)e^{-i\tau_1} + c_2^{(0)}(x)e^{+i\tau_1} + \left[-\frac{k(x, 0)h(x)}{a^4(x)} + \int_0^x R(x, s) \frac{k(x, 0)h(s)}{a^4(s)} ds \right] \sigma + \frac{h(x)}{a^2(x)}, \quad (9)$$

где $R(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} k_{m+1}(x, s)$ — резольвента ядра $k_0(x, s) \equiv k(x, s) / a^2(x)$, то есть $k_1(x, s) = k(x, s)$;

$$k_2(x, s) = \int_s^x k(x, t_1)k_1(t_1, s)dt_1, \dots, k_m(x, s) = \int_s^x k(x, t_1)k_{m-1}(t_1, s)dt_1.$$

Подчиним решения (9) начальным условиям и получим уравнения

$$\begin{cases} c_1^{(0)}(0) + c_2^{(0)}(0) + \frac{h(0)}{a^2(0)} = y^0; \\ -ia(0)c_1^{(0)}(0) + ia(0)c_2^{(0)}(0) = z^0, \end{cases} \quad (10)$$

откуда вычислим значения

$$c_1^{(0)}(0) = \frac{1}{2} \left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2(0)} - \frac{iz^0}{a(0)} \right), \quad c_2^{(0)}(0) = \frac{1}{2} \left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2(0)} + \frac{iz^0}{a(0)} \right).$$

Для окончательного вычисления функций $c_1^{(1)}(x), c_2^{(1)}(x)$ переходим к задаче (ε^1) . Определяя ее решение в виде суммы

$$y_1(x, \tau, \sigma) = c_1^{(1)}(x)e^{-i\tau_1} + c_2^{(1)}(x)e^{+i\tau_1} + c_3^{(1)}(x)e^{\tau_2} + c_4^{(1)}(x)\sigma + c_0^{(1)}(x) \quad (11)$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} L_0 y_1 &\equiv [(a^2(x) - \gamma^2 x^2)c_3^{(1)}(x)]e^{\tau_2} + a^2(x)c_4^{(1)}(x)\sigma + a^2(x)c_0^{(1)}(x); \\ K_0 y_1 &= k(x, 0)c_0^{(1)}(x)\sigma + \left(\int_0^x k(x, s)c_4^{(1)}(s)ds \right)\sigma + \left(\int_0^x k(x, s)c_3^{(1)}(s)ds \right)e^{\tau_2}; \\ L_1 y_0 &= -i2a(x)\dot{c}_1^{(0)}(x)e^{-i\tau_1} + i2a(x)\dot{c}_2^{(0)}(x)e^{+i\tau_1} - 2\gamma xc_4^{(0)}(x)\sigma - \\ &\quad - i\dot{a}(x)c_1^{(0)}(x)e^{-i\tau_1} + i\dot{a}(x)c_2^{(0)}(x)e^{+i\tau_1} - \gamma \dot{c}_4^{(0)}(x)\sigma; \\ K_1 y_1 &= -\frac{k_{00}^{(1)}(x, x)}{\gamma} - \frac{k_{00}^{(1)}(x, 0)}{\gamma} e^{\tau_2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} k_{00}^{(1)}(x, 0)\sigma + \frac{k_{10}(x, x)}{\gamma x - ia(x)} e^{-i\tau_1} + \frac{ik_{10}(x, 0)}{a(0)} e^{\tau_2} + \\ &\quad + \frac{k_{20}(x, x)}{\gamma x + ia(x)} e^{+i\tau_1} - \frac{ik_{20}(x, 0)}{a(0)} e^{\tau_2} + \frac{\hat{k}_{40}(x, x)}{\gamma} - \frac{\hat{k}_{40}(x, 0)}{\gamma} e^{\tau_2} - \frac{\partial}{\partial s} \hat{k}_{40}^{(1)}(x, 0)\sigma, \end{aligned}$$

где $k_i^{(1)}(x, s) \equiv [k_i(x, s) - k_i(x, 0)] / s, i = 0, 2, \hat{k}_4^{(1)}(x, s) = \int_0^s k_4^{(1)}(x, \theta) d\theta$, получим

$$\begin{aligned} &[a^2(x) - \gamma^2 x^2]c_3^{(1)}(x)e^{\tau_2} + a^2(x)c_4^{(1)}(x)\sigma + k(x, 0)c_0^{(1)}(x)\sigma + \left(\int_0^x k(x, s)c_4^{(1)}(s)ds \right)\sigma + \\ &+ \left(\int_0^x k(x, s)c_3^{(1)}(s)ds \right)e^{\tau_2} + a^2(x)c_0^{(1)}(x) = - \left[-2a(x)\dot{c}_3^{(0)}(x)e^{-i\tau_1} + 2a(x)\dot{c}_2^{(0)}(x)e^{i\tau_1} - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma xc_4^{(0)}(x)\sigma - i\dot{a}(x)c_1^{(0)}(x)e^{-i\tau_1} + i\dot{a}(x)c_2^{(0)}(x)e^{i\tau_1} - \gamma c_4^{(0)}(x)\sigma + \frac{k_{00}^{(1)}(x, x)}{\gamma} \right] - \\ &- \left[-\frac{k_{00}^{(1)}(x, 0)}{\gamma} e^{\tau_2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} k_{00}^{(1)}(x, 0)\sigma + \frac{k_{10}(x, x)}{\gamma x - ia(x)} e^{-i\tau_1} + \frac{ik_{10}(x, 0)}{a(0)} e^{\tau_2} + \frac{k_{20}(x, x)}{\gamma x + ia(x)} e^{i\tau_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ik_{20}(x, 0)}{a(0)} e^{\tau_2} + \frac{\hat{k}_{40}^{(1)}(x, x)}{\gamma} - \frac{\hat{k}_{40}^{(1)}(x, 0)}{\gamma} e^{\tau_2} - \frac{\partial}{\partial s} \hat{k}_{40}^{(1)}(x, 0)\sigma \right]. \end{aligned}$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$2ia(x)\dot{c}_1^{(0)}(x) - i\dot{a}(x)c_1^{(0)}(x) - \frac{k_{10}(x, x)}{\gamma x - ia(x)} = 0; \quad (12)$$

$$-2ia(x)\dot{c}_2^{(0)}(x) - i\dot{a}(x)c_2^{(0)}(x) - \frac{k_{20}(x, x)}{\gamma x + ia(x)} = 0; \quad (13)$$

$$[a^2(x) - \gamma^2 x^2]c_3^{(1)}(x) + \int_0^x k(x, s)c_3^{(1)}(s)ds = \frac{k_{00}^{(1)}(x, 0)}{\gamma} - \frac{ik_{10}(x, \theta)}{a(0)} + \frac{ik_{20}(x, 0)}{a(0)} + \frac{\hat{k}_{40}(x, 0)}{\gamma}; \quad (14)$$

$$a^2(x)c_4^{(1)}(x) + k(x, 0)c_0^{(1)}(x) + \int_0^x k(x, s)c_4^{(1)}(s)ds = \gamma c_4^{(0)}(x) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} k_{00}^{(1)}(x, 0) + \frac{\partial}{\partial s} k_{40}(x, 0) + 2\gamma xc_4^{(0)}(x); \quad (15)$$

$$a^2(x)c_0^{(1)}(x) = \frac{\hat{k}_{40}^{(1)}(x, x)}{\gamma}. \quad (16)$$

Уравнения (12), (13) с учетом начальных условий (10) имеют решения в виде

$$c_1^{(0)}(x) = c_1^{(0)}(0)e^{\int_0^x \frac{1}{2ia(s)} \left[ia(s) + \frac{k_{10}(x, s)}{\gamma s - ia(s)} \right] ds}; \quad (17)$$

$$c_2^{(0)}(x) = c_2^{(0)}(0)e^{\int_0^x \frac{1}{2ia(s)} \left[ia(s) - \frac{k_{20}(x, s)}{\gamma s + ia(s)} \right] ds}. \quad (18)$$

Уравнение (16) имеет единственное решение

$$c_0^{(1)}(x) = \frac{\hat{k}_{40}^{(1)}(x, x)}{\gamma a^2(x)}.$$

Если в уравнении (14) обозначить

$$\frac{k_{00}^{(1)}(x, 0)}{\gamma} - \frac{ik_{10}(x, 0)}{a(0)} + \frac{ik_{20}(x, 0)}{a(0)} + \frac{\hat{k}_{40}(x, 0)}{\gamma} = f_1(x),$$

то оно будет иметь решение в виде

$$c_3^{(1)}(x) = f_1(x) + \int_0^x R_1(x, s)f_1(s)ds,$$

где $R_1(x, s)$ — резольвента интегрального уравнения (14). Обозначая в (15)

$$\gamma c_4^{(0)}(x) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} \hat{k}_{00}^{(1)}(x, 0) + \frac{\partial}{\partial s} \hat{k}_{40}(x, 0) + 2\gamma x c_4^{(0)}(x) + \frac{k(x, 0)\hat{k}_{40}(x, x)}{\gamma a^2(x)} = f_2(x),$$

найдем решение уравнения (15) в виде

$$c_4^{(1)}(x) = f_2(x) + \int_0^x R_2(x, s)f_2(s)ds,$$

где $R_2(x, s)$ — резольвента интегрального уравнения (15).

Таким образом, решение (11) уравнения (ε^1) запишется в виде

$$y_1(x, \tau, \sigma) = c_1^{(1)}(x)e^{-i\tau_1} + c_2^{(1)}(x)e^{i\tau_1} + \left[f_1(x) + \int_0^x R_1(x, s)f_1(s)ds \right] e^{\tau_2} + \\ + \left[f_2(x) + \int_0^x R_2(x, s)f_2(s)ds \right] \sigma + \frac{\hat{k}_{40}^{(1)}(x, x)}{\gamma \cdot a^2(x)},$$

где $c_1^{(1)}(x)$, $c_2^{(1)}(x)$ — произвольные функции. Для их вычисления переходим к задаче (ε^2). Решая (ε^2), однозначно найдем функции $c_1^{(1)}(x)$, $c_2^{(1)}(x)$. Продолжая этот процесс, построим решения всех итерационных задач (ε^k).

Запишем, например, асимптотическое решение первого порядка задачи (1). Оно будет выглядеть так:

$$y_{\varepsilon^1}(x, \tau, \sigma) \equiv y_0(x, \tau, \sigma) \Big|_{\tau=\varphi}^{\tau=\varphi} + \varepsilon y_1(x, \tau, \sigma) \Big|_{\sigma=\varphi}^{\sigma=\varphi} = \\ = \frac{1}{2} \left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2(0)} - \frac{iz^2}{a(0)} \right) e^{\int_0^x \frac{1}{2ia(s)} \left[ia(s) + \frac{k_{10}(x, s)}{\gamma s - ia(s)} \right] ds} \cdot e^{-\frac{ia(x)}{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \left(y^0 - \frac{h(0)}{a^2(0)} + \frac{iz^0}{a(0)} \right) e^{\int_0^x \frac{1}{2ia(s)} \left[ia(s) - \frac{k_{20}(x, s)}{\gamma s + ia(s)} \right] ds} \cdot e^{\frac{ia(x)}{\varepsilon}} + \\ + \left[-\frac{k(x, 0)h(x)}{a^4(x)} + \int_0^x R(x, s) \frac{k(x, 0)h(s)}{a^4(0)} ds \right] e^{\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}} \int_0^x e^{\frac{\gamma s^2}{2\varepsilon}} ds + \varepsilon \left[f_1(x) + \int_0^x R_1(x, s)f_1(s)ds \right] e^{\frac{\gamma x}{\varepsilon}} + \\ + \frac{h(x)}{a^2(x)} + \varepsilon c_1^{(1)}(x) e^{-\frac{ia(x)}{\varepsilon}} + \varepsilon c_2^{(1)}(x) e^{\frac{ia(x)}{\varepsilon}} + \varepsilon \frac{\hat{k}_{40}^{(1)}(x, x)}{\gamma \cdot a^2(x)} + \varepsilon \left[f_2(x) + \int_0^x R_2(x, s)f_2(s)ds \right] e^{-\frac{\gamma x^2}{2\varepsilon}}.$$

Аналогично вычисляются высшие приближения.

Список литературы

- 1 Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

Б.Т.Қалымбетов, Н.С.Иманбаев, А.Д.Ниязымбетов

Тұрақсыз мәнді ядросы бар интегралдық оператордың сингулярлы ауытқыған есебі үшін регуляризациялау әдісінің алгоритмі

Мақалада уақыт аралығының бастапқы нүктесінде бірінші ретті ерекшелігі бар интегралдық оператордың жағдайындағы ядросы жылдам кемімелі Вольтерра типіндегі екінші ретті сингулярлы ауытқыған интегро-дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есепке асимптотикалық шешім құру алгоритмі баяндалған. Интегралдық операторды регуляризациялау үшін бөліктеп интегралдаудың модифицирленген әдісі қолданылған. Бірінші ретті асимптотикалық шешімі табылған.

B.T.Kalimbetov, N.S.Imanbayev, A.D.Niyazimbetov

Algorithm regularization method for singularly perturbed problems with unstable kernel values of the integral operator

In this work it is presented an algorithm for the construction of the asymptotic solution of the initial value problem for a singularly perturbed integro-differential equation of the second order Volterra type with a rapidly decaying kernel, when the integral operator has a singularity of the first order at the initial point of the considered period of time. For regularization of integral operator a modified operation of integration by parts is used. Asymptotic behavior of first-order solutions of the original problem is constructed.

References

- 1 Lomov S.A. *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981, p. 400.