УДК 517.946

Ж.Н.Тасмамбетов

Актюбинский региональный государственный университет им.К.Жубанова
(E-mail: tasmam@rambler.ru)

О построении решения уравнения Матье методом Фробениуса-Латышевой

В статье изучены возможности построения нормальных, поднормальных и нормально-регулярных решений алгебраического уравнения Матье методом Фробениуса-Латышевой. Рассмотрены произведения поднормальных рядов Матье и установлено уравнение в частных производных второго порядка, решениями которого являются произведения поднормальных рядов Матье. Показано также, что это поднормальное решение является и решением исходного уравнения Матье с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: нормальные решения, поднормальные решения, нормально-регулярные решения, ранг, подранг, антиранг, антиподранг.

1 Предварительные сведения

Дифференциальное уравнение, связанное с именем Матье, было рассмотрено в 1868 г. при изучении задачи мембраны, имеющей границу в виде эллипса [1]. К другим задачам математической физики, приводящим к функциям Матье, также относятся приливные волны в цилиндрическом сосуде с эллиптической границей, определенные формы установившегося вихревого движения в эллиптическом цилиндре, а также некоторые задачи динамики твердого тела и др. Обычно приложения функций Матье на практике разделяют на две главные категории. К первой относятся краевые задачи, возникающие при решении двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 \cdot V = 0 \qquad (1.1)$$

методом разделения переменных [2] в эллиптических координатах. Это приводит к двум уравнениям Матье.

Рассмотрим уравнение Матье

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + [h - 2\theta \cdot \cos(2x)] \cdot y = 0, \qquad (1.2)$$

которое применялось Айнсом [3] и другими. Если h и θ примем как заданные вещественные и комплексные числа, то уравнение (1.2) будет называться *общим уравнением Матье.* Однако для краткости назовем его просто уравнением Матье. Соответствующие решения уравнения Матье, являющиеся четными или нечетными функциями от x, называются *функциями Матье*, или *функциями эллиптического цилиндра.* Решение уравнения (1.2) выражается в различных формах, в зависимости от значений параметров h и θ. Часто рассматривают решения, имеющие период π или 2π относительно x. Ко второй категории относятся задачи с начальными условиями, причем применяется только одно уравнение вида (1.2). Однако большинство приложений функций Матье принадлежит к первой категории задач, вытекающих из волнового уравнения.

Цель данной работы - методом Фробениуса-Латышевой изучить особенности построения нормальных, поднормальных и нормально-регулярных решений *алгебраического уравнения Матье*

$$4x(1-x) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + 2(1-2x)\frac{du}{dx} + (h - 2\theta + 4\theta x) \cdot u = 0, \qquad (1.3)$$

полученного с помощью преобразования

$$x = \sin^2(z) \tag{1.4}$$

из уравнения Матье (1.2) с периодическими коэффициентами.

Рассматриваются также произведения функции Матье и уточняется вид поднормальных рядов.

2 Основные понятия

Исследуя алгебраическое уравнение Матье полученной подстановкой $x = cos^2 z$, Линдеман установил ряд интересных свойств уравнения вблизи регулярных особых точек [4]. Найденные решения приводятся в общей форме, а решение вблизи иррегулярной особой точки вообще не исследовано.

В данной работе используется другой подход, где используя понятия ранга и антиранга, устанавливаются регулярность и иррегулярность особых точек и сходимость и расходимость построенных рядов по виду коэффициентов заданного уравнения определяется вид соответствующих им решений.

Приведем используемые основные понятия. Понятие ранга

$$p = 1 + k, \qquad k = \max_{(1 \leq s \leq n)} \frac{\beta_s - \beta_0}{s} \tag{2.1}$$

было введено А. Пуанкаре, а антиранга

$$m = -1 - \lambda, \qquad \lambda = \min_{(1 \leq \alpha \leq n)} \frac{\pi_\alpha - \pi_0}{\alpha} \tag{2.2}$$

– Л.Томе.

Эти понятия точно характеризуют изменения коэффициентов в линейном дифференциальном уравнении

$$\sum_{i=0}^{n} P_n(x) \cdot \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = 0 \tag{2.3}$$

с полиномиальными коэффициентами

$$P_i(x) = \sum_{s=\pi_i}^{\beta_i} p_{is} \cdot x^s,$$

где $\pi_i \leq \beta_i$ – целые неотрицательные числа, причем не все $P_i(0) = 0$.

Нетрудно заметить, что ранг уравнения определяется по наибольшим β_i степеням независимых переменных, а антиранг – по наименьшим степеням π_i ($i = \overline{0, n}$). Обычно нормальные и поднормальные решения связывают с особой точкой $x = \infty$, а нормально-регулярные решения – с особой точкой $x = 0$. Профессор Киевского университета К.Я. Латышева [5] доказала ряд теорем, где с помощью этих понятий устанавливаются регулярность и иррегулярность особых точек по виду коэффициентов заданного уравнения. Так, если $p \leq 0$, то точка $x = \infty$ – особая регулярная, когда $p > 0$ – особая иррегулярная. При $m \leq 0$ – особая точка, $x = 0$ – регулярная, а при $m > 0$ – особая иррегулярная [5].

Определение 2.1. Нормальным решением в окрестности особой иррегулярной точки $x = \infty$ уравнения (2.3) называется решение вида

$$y = \exp Q(x) \cdot x^\rho \cdot \sum_{i \equiv 0}^{\infty} C_i \cdot x^{-i}, \tag{2.4}$$

в котором ряд правой части сходится для достаточно больших значений x; ρ – корень определяющего уравнения относительно особой точки $x=\infty$ вспомогательного уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} T_i(x)\cdot\frac{d^{n-i}U}{dx^{n-i}}=0, \tag{2.5}$$

полученного из (2.4) с помощью преобразования

$$y=\exp Q(x)\cdot U, \tag{2.6}$$

где функция

$$Q(x)=\sum_{s=1}^{p}\frac{\alpha_{p-s}\cdot x^s}{s}, \tag{2.7}$$

α_{p-s} $(s=1,2,....,p)$ – неизвестные коэффициенты.

Определение 2.2. Формальные решения уравнения (2.3) вида

$$y\sim\exp Q(x)\cdot x^{\rho}\cdot\sum_{i\equiv 0}^{\infty}C_i\cdot x^{-i} \tag{2.8}$$

называются нормальными рядами Томе порядка p.

Определение 2.3. Величина числа p, определяемая равенством (2.1), называется *порядком ряда* (2.4) и может быть целым или дробным числом (положительным и отрицательным).

Утверждение 2.1. Уравнение (2.3) дробного подранга $k=\frac{s}{q}$, где q – взаимно простые числа, с помощью замены

$$x=t^q \tag{2.9}$$

превращается в уравнение целого ранга.

Определение 2.4. Соответствующие решения дробного p ранга называются поднормальными.

Существование асимптотических решений. При разыскании условий существования n нормальных рядов Томе, как решений уравнения (2.3), основное значение имеют корни так называемого характеристического уравнения

$$\alpha_0^n+p_{10}\cdot\alpha_0^{n-1}+...+p_{n-1,0}\cdot\alpha_0+p_{n,0}=0, \tag{2.10}$$

где неизвестным является α_0 – коэффициент при наивысшей степени x функции $Q(x)$ в (2.7). Я.Горн показал, что, если все корни уравнения (2.10) различны, то существует n различных нормальных рядов Томе как частных асимптотических решений уравнения (2.3). В противном случае вопрос остается открытым.

Фабри, А. Пуанкаре, С.Е. Лав, Э. Айнс утверждали, что равные значения α_0 приводят k поднормальным рядам вида

$$y\sim\exp Q(x)\cdot x^{\frac{1}{s}}x^{\rho}\cdot\sum_{i\equiv 0}^{\infty}C_i\cdot x^{-\frac{1}{s}}, \tag{2.11}$$

где s – целое число ≥ 2; функция $\exp Q(x^{\frac{1}{s}})$ – многочлен с дробными степенями x.

Все это показывает, какое место занимали исследования по этим вопросам в работах известных математиков. Однако настоящие причины возникновения поднормальных рядов, превращение поднормального ряда в нормальный, причины существования нормальных решений остались неясными.

3 Применение метода Фробениуса-Латышевой

К.Я. Латышева, преобразуя асимптотические ряды целого порядка, показала настоящие причины возникновения поднормальных рядов.

Теорема 3.1. Если подранг уравнения (2.3)-(2.4) есть дробное число, то существует не менее q поднормальных рядов порядка $\frac{k}{q}+1$ при условии $k \geq -q$, удовлетворяющих, может быть, только формально уравнению (2.3).

Примечание 3.1. Характеристическое уравнение преобразованного при помощи замены (2.6) дифференциального уравнения необязательно имеет кратные корни, в силу чего из теоремы 3.1 следует, что поднормальные ряды вида (2.11), где функции $Q_1(x)$ имеют выражение

$$Q_1 = \frac{p_0 \cdot x^{\frac{s}{q}+1}}{s+q} + \frac{p_1 \cdot x^{\frac{s-1}{q}+1}}{s+q-1} + ... + \frac{p_{s+q} \cdot x^{\frac{1}{q}}}{1}, \tag{3.1}$$

не связаны с обязательным существованием кратных корней у характеристического уравнения.

Это показывает, что для уравнений с дробным рангом решение представляется в виде асимптотических рядов по дробным степеням x, а для уравнений целого ранга в виде асимптотических рядов по целым степеням x. Построение решения алгебраического уравнения Матье подтверждает это высказывание.

Пример 3.1. Построим решения алгебраического уравнения: Матье

$$4x(1-x) \cdot y''_{xx} + 2(1-2x) \cdot y'_x + (h - 2\theta + 4\theta x) \cdot y = 0, \tag{3.2}$$

используя метод Фробениуса-Латышевой. Начнем с определения ранга уравнения. Обозначим наибольшие степени коэффициентов: $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$. Используя формулу (2.1), находим подранг уравнения

$$k_1 = \frac{\beta_1 - \beta_0}{1} = \frac{1-2}{1} = -1, \qquad k_2 = \frac{\beta_2 - \beta_0}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2};$$

$k_{\max} = -\frac{1}{2}$ – дробный подранг, $q = 2$. Здесь β_0 – наибольшая степень коэффициента при старшей производной. Поэтому для того, чтобы уравнение привести к уравнению с целым подрангом, следует произвести преобразование вида (2.9), т.е. в нашем случае $x = t^q = t^2$, после чего оно приводится к виду

$$(1-t^2) \cdot y''_{tt} - t \cdot y''_t + (h - 2\theta + 4\theta \cdot t^2)y = 0. \tag{3.3}$$

Снова находим подранг и ранг уравнения: $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$.

$$k_1 = \frac{\beta_1 - \beta_0}{1} = \frac{1-2}{1} = -1, \qquad k_2 = \frac{\beta_2 - \beta_0}{2} = \frac{2-2}{2} = 0;$$

$k_{\max} = 0$, ранг $p = 1 + k_{\max} = 1$. Получили уравнение с целым подрангом и рангом. Отсюда получим справедливость преобразования (2.6):

$$y = e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot U = \exp(\alpha_0 \cdot t) \cdot U, \tag{3.4}$$

где $Q(x) = \alpha_0 \cdot t$.

О построении нормального решения вспомогательного уравнения. Вспомогательное уравнение, полученное с помощью преобразования (3.4), имеет вид

$$(1-t^2)y^{''} + (2\alpha_0 - t - 2\alpha_0 t^2)y^{'} + \{(4\theta - \alpha_0^2)t^2 - \alpha t + (\alpha^2 + h - 2\theta)\}y = 0. \tag{3.5}$$

Отсюда характеристическое уравнение вида (2.10) получим, приравнивая нулю коэффициент при наибольшей степени независимой переменной при неизвестной y:

$$\alpha^2 - 4\theta = 0. \tag{3.6}$$

Оно имеет различные корни $\alpha_0^{(1,2)} = \pm 2\sqrt{\theta}$. При различных значениях $\alpha_0^{(1)}$ и $\alpha_0^{(2)}$ из (3.5) получим два уравнения:

$$(1-t^2)y'' + (4\sqrt{\theta} - t - 4\sqrt{\theta}t^2)y' + (-2\sqrt{\theta}t + h - 2\theta)y = 0 \tag{3.7}$$

и

$$(1-t^2)y'' + (-4\sqrt{\theta} - t - 4\sqrt{\theta}t^2)y' + (2\sqrt{\theta}t + h + 2\theta)y = 0, \tag{3.8}$$

каждое из которых должно иметь по два решения вида

$$y = t^{\rho} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot t^{-\mu} \qquad (A_0 \neq 0) \tag{3.9}$$

в окрестности особых точек. С учетом преобразования (3.4) это дает нормальные решения вида

$$y = exp(\pm 2 \cdot \sqrt{\theta}t) \cdot t^{\rho} \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot t^{-\mu} \qquad (C \neq 0), \tag{3.10}$$

где ρ, C_{μ} $(\mu = 0, 1, 2, ...)$ – неизвестные постоянные, которые следует определить. Решение вида (3.10) является нормальным решением вспомогательного уравнения (3.5) или *присоединенных уравнений* (3.7) и (3.8). p устанавливается из определяющих уравнений относительно особых точек $x = \infty$. Неизвестные коэффициенты C_{μ} $(\mu = 0, 1, 2, ...)$ ряда (3.9) находим из рекуррентных последовательностей

$$\sum_{l=0}^{\mu} C_{\mu-l} \cdot \varphi_l(r - \mu + l) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, ...;\ \ \mu - l \geq 0). \tag{3.11}$$

С учетом преобразования $x = t^2$ нормальное решение вспомогательного уравнения представляется в виде

$$y = \exp\left(\pm 2 \cdot \sqrt{\theta}t\right) \cdot x^{\frac{\rho}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot x^{\frac{-\mu}{2}} \qquad (C \neq 0). \tag{3.12}$$

Это решение дает поднормальное решение исходного уравнения (3.2). Приступим к построению решения вида (3.12).

Построение поднормального решения. Применяя метод Фробениуса-Латышевой, сначала построим нормальные решения уравнения (3.7) и (3.8). Применение этого метода начинается с составления характеристического уравнения путем подставления вместо неизвестной $y = t^{\rho}$:

$$L_1[t^{\rho}] \equiv t^{\rho-2} \cdot \left\{ \left[\rho(\rho-1) + [4 \cdot \sqrt{\theta}\rho t] + [-\rho(\rho-1) - \rho + (h+2\theta)]\right] t^2 + [-4\sqrt{\theta}\rho - 2\sqrt{\theta}]t^3 \right\} =$$

$$= t^{\rho+1} \left\{ -4\sqrt{\theta}(2\rho+1) - \frac{\rho^2 - (h+2\theta)}{t} + \frac{4\sqrt{\theta}}{t^2} + \frac{\rho(\rho-1)}{t^3} \right\}; \tag{3.13}$$

$$L_2[t^{\rho}] \equiv t^{\rho+1} \cdot \left\{ 4 \cdot \sqrt{\theta}(2\rho+1) + \frac{\rho^2 - (h+2\theta)}{t} + \frac{4 \cdot \sqrt{\theta}\rho}{t^2} + \frac{\rho(\rho-1)}{t^3} \right\}. \tag{3.14}$$

Здесь (3.13) - характеристическая функция уравнения (3.7), а (3.14) – второго уравнения (3.8). Формы представления характеристических функций применяются при построении решения в окрестности особой точки $x = \infty$.

Найдем определяющие уравнения первого (3.7):

$$f_0^{(1)}(\rho) \equiv -4 \cdot \sqrt{\theta} \cdot (2\rho + 1) = 0$$

и второго (3.8) уравнения:

$$f_0^{(2)}(\rho) \equiv 4 \cdot \sqrt{\theta} \cdot (2\rho + 1) = 0.$$

Они оба имеют кратный корень $\rho = -\frac{1}{2}$. Поэтому каждое уравнение имеет по одному решению, соответствующему этому корню. Объединим их в виде нормального решения (3.10):

$$y = \exp\left(\pm 2 \cdot \sqrt{\theta} t\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^{(j)} \cdot t^{-\mu} \qquad (C \neq 0). \tag{3.15}$$

Неизвестные постоянные $C_\mu^{(j)}$ $(\mu = 0, 1, 2, .., \;\; j = 1, 2)$ определяются с помощью рекуррентных последовательностей (3.11) из каждого уравнения (3.7) и (3.8) отдельно, используя при этом характеристические функции Фробениуса (3.13) и (3.14). Тогда, учитывая преобразование $x = t^2$, поднормальные решения исходного уравнения (3.2) представляются в виде

$$y \sim \exp\left(\pm 2 \cdot \sqrt{\theta} x^{\frac{1}{2}}\right) \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu \cdot x^{-\frac{4}{1} - \frac{\mu}{2}} \qquad (C_0 \neq 0). \tag{3.16}$$

В [2; 141] отмечается, что «алгебраическое уравнение Матье имеет две регулярные особые точки при $x = 0$ и $x = 1$, обе с показателями 0 и $\frac{1}{2}$ и одну иррегулярную особую точку на бесконечности. Из-за этой иррегулярной особенности уравнение (3.2) сравнительно трудно для изучения». Нами отмечено, что понятие ранга уравнения связано с особенностью в $x = \infty$ и при $p > 0$ эта особенность является иррегулярной особой точкой. В нашем случае ранг $p = 1 + k_{\max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, что показывает иррегулярность особой точки $x = \infty$. Применяя метод Фробениуса-Латышевой, построим поднормальное решение в виде (3.16). При этом убедились, что поднормальное решение существует не только тогда, когда характеристическое уравнение (2.10) имеет кратные корни. Так, характеристическое уравнение $\alpha_0^2 - 4\theta = 0$ алгебраического уравнения Матье (3.2) имеет простые корни $\alpha_0^1 = +2 \cdot \sqrt{\theta}$ и $\alpha_0^2 = -2 \cdot \sqrt{\theta}$. Однако, подранг уравнения $k_{\max} = -\frac{1}{2}$ – дробное число, поэтому оно имело поднормальные решения вида (3.16). (3.16) в точности совпадают с формальным поднормальным решением приведенным в [2; 148]. Уравнение (3.2) только формально удовлетворяет эти решения, поскольку они расходятся, а из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что при $x \longrightarrow \infty$ они асимптотически представляют некоторые решения.

Кроме того, форма представления (3.16) интересна тем, что позволяет получить асимптотические формы для больших значений $\sin(z)$. Действительно, учитывая преобразование (1.4), убеждаемся, что существуют формальные ряды

$$y \sim \exp\left(\pm 2 \cdot \theta^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(z)\right) \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu \cdot \sin(z)^{-\frac{1}{2} - n} \qquad (C_0 \neq 0) \tag{3.17}$$

удовлетворяющие уравнению Матье (1.2).

Отметим еще два свойства уравнения (3.2):

1. Любое решение уравнения Матье можно представить в виде линейной комбинации двух рядов (3.17) [2; 148].

2. Уравнение Матье имеет логарифмические решения. Действительно, корни определяющих уравнений кратные: $\rho_{1,2} = -\frac{1}{2}$. Это показывает, что присоединенные уравнения (3.7) и (3.8) кроме решения (3.10), имеют также логарифмические решения. Однако построение логарифмического решения требует отдельного исследования.

Нормально-регулярные решения. Нормально-регулярное решение

$$y = \exp Q(x) \cdot x^{\rho} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \cdot x^{\mu}, \qquad (A_0 \neq 0) \tag{3.18}$$

связано с особой точкой $x = 0$ или другими конечными особыми точками, поскольку их с помощью преобразования можно привести к особой точке $x = 0$ [4]. Название нормально-регулярное было введено К.Я. Латышевой после изучения различных свойств этого решения с помощью понятия антиранга $m = -1 - \lambda$ (λ – антиподранг) уравнения [5; 39]. Так, на основании равенства (2.2) антиранг $m =\leq 0$, поэтому конечные особенности $x = 0$ и $x = 1$ - регулярные особые точки. Когда особая точка - регулярная степень $Q(x)$ определяющего множителя $\exp Q(x)$ будет тождественно равна нулю: $Q(x) \equiv 0$, тогда уравнение имеет решение в виде обобщенного степенного ряда двух переменных:

$$y = x^{\rho} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} \cdot x^{\mu}, \qquad (A_0 \neq 0), \tag{3.19}$$

ρ, A_{μ} $(\mu = 0, 1, 2, ...)$ – неизвестные постоянные.

Для построения регулярных решений уравнения (3.2) составим характеристическую функцию Фробениуса:

$$L[x^{\rho}] \equiv x^{\rho} \cdot \{[2\rho \cdot (2\rho - 1)] - [4\rho^2 + h - 2\theta] \cdot x + 4\theta \cdot x^2\}, \tag{3.20}$$

где определяющее уравнение

$$f_0(\rho) = 2\rho(2\rho - 1) = 0$$

имеет два корня: $\rho_1 = 0$, $\rho = \frac{1}{2}$. Они являются показателями особых точек $x = 0$ и $x = 1$. Используя эти данные, построим два решения

$$y_{00} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} \cdot x^{\mu}, \qquad y_{01} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu} \cdot x^{\mu} \tag{3.21}$$

в окрестности особой точки $x = 0$ и два решения

$$y_{10} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{\mu} \cdot (1 - x)^{\mu}, \qquad y_{11} = (1 - x)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} b'_{\mu} \cdot (1 - x)^{\mu} \tag{3.22}$$

в окрестности особой точки $x = 1$, как у Линдемана [4; 274]. Здесь приняты обозначения Линдемана-Стильтеса y_{00}, y_{01}, y_{10} и y_{11}, а неизвестные постоянные a_{μ}, b_{μ} ,a'_{μ} и b'_{μ} приводятся в общем виде. Хотя они отличаются от коэффициентов примера Линдемана, остается справедливой форма Линдемана теоремы Флоке [4; 274, 475]. Конкретные значения этих коэффициентов определяются с помощью характеристической функции Фробениуса из рекуррентных уравнений в виде

$$\sum_{l=0}^{\mu} C_{\mu-l} \cdot f_l(\rho + \mu - l) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, ...; \ \mu - l \geq 0). \tag{3.23}$$

Два ряда (3.21) сходятся, когда $|x| < 1$, а (3.22) – когда $|1 - x| < 1$.

Сходимость обеспечивается следующей теоремой К.Я. Латышевой [5; 43].

Теорема 3.2. Линейное дифференциальное уравнение (2.3) имеет регулярные решения в виде рядов (3.19), сходящихся в окрестности $x = 0$, в том и только в том случае, когда антиранг уравнения (2.3) $m = 0$ равен нулю.

Сходимость непосредственно можно определить по виду заданных коэффициентов. Это является преимуществом метода Фробениуса-Латышевой.

Следствие. Для того, чтобы уравнение (2.3) имело n регулярных решений в окрестности $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы антиподранг уравнения был равен $\lambda \geq -1$.

Следует отметить, что условие $\lambda \geq -1$ является обобщением условий Фукса регулярности решений.

4 Произведения поднормальных рядов Матье

Ряд работ Э.Айнса и Сипса [2; 468] были посвящены изучению бесконечных рядов, представленных в виде произведений функций Матье, которые связаны с конкретными приложениями. Например, результаты Сипса интерпретируются как получение круговых цилиндрических волн путем суперпозиции эллиптических цилиндрических волн. Кроме того, им получены также разложения, содержащие произведения четырех функций Матье [2; 168].

В данной работе, применяя метод Ватсона, мы хотим получить произведения функций Матье, представленные в виде поднормальных рядов. Этот метод успешно применяется в [6; 54] для получения произведения ортогональных многочленов по переменным x, y и для получения произведения бесселевых функций в [7; 78].

Пусть функция Матье $Z_{10}(x,\theta)$, представленная в виде поднормального ряда (3.16), удовлетворяет алгебраическому уравнению Матье

$$4x(1-x)\cdot Z''_{xx} + 2(1-2x)\cdot Z'_x + (h - 2\theta + 4\theta x)Z = 0. \qquad (4.1)$$

Далее пусть функция Матье $Z_{01}(y,\theta')$ удовлетворяет уравнению Матье

$$4y(1-y)\cdot Z''_{yy} + 2(1-2y)\cdot Z'_y + (h - 2\theta + 4\theta y)Z = 0. \qquad (4.2)$$

Умножим равенство (4.1) на $Z_{01}(y,\theta')$, а равенство (4.2) - на $Z_{10}(x,\theta)$ и сложим их почленно. В результате получим уравнение

$$\begin{gathered}
4x(1-x)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}[Z_{10}(x,\theta)\cdot Z_{01}(y,\theta')] + 4y(1-y)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}[Z_{10}(x,\theta)\cdot Z_{01}(y,\theta')]+\\
+2(1-2x)\frac{\partial}{\partial x}[Z_{10}(x,\theta)\cdot Z_{01}(y,\theta')] + 2(1-2y)\frac{\partial}{\partial y}[Z_{10}(x,\theta)\cdot Z_{01}(y,\theta')]+\\
+[(h+h') - 2(\theta+\theta') + 4(\theta x + \theta' y)][Z_{10}(x,\theta)\cdot Z_{01}(y,\theta') = 0].
\end{gathered}$$

Следовательно, произведение $U(x,y;\theta,\theta') = Z_{10}(x,\theta)\cdot Z_{01}(y,\theta')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\begin{gathered}
4x(1-x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4y(1-y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2(1-2x)\frac{\partial U}{\partial x} + 2(1-2y)\frac{\partial U}{\partial y}+\\
+[h_1 - 2\theta_1 + 4(\theta x + \theta' y)]U = 0,
\end{gathered} \qquad (4.3)$$

где $h_1 = h + h'$, $\theta_1 = \theta + \theta'$.

Тогда произведение поднормальных рядов представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_{11}(x,y,\theta,\theta') \sim Z_{10}(x,\theta)\cdot Z_{01}(y,\theta) = \exp(2\cdot\sqrt{\theta}\cdot x^{\frac12})\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu}^{(1)}\cdot x^{-\frac14-\frac{\mu}{2}}\times \\ \times\exp(2\cdot\sqrt{\theta}'\cdot y^{\frac12})\cdot\sum_{\upsilon=0}^{\infty} C_{\upsilon}^{(1)}\cdot y^{-\frac14-\frac{\upsilon}{2}} = \\ = \exp(2\cdot\sqrt{\theta}\cdot x^{\frac12}+2\cdot\sqrt{\theta}'\cdot y^{\frac12})\cdot\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(1)}\cdot x^{-\frac14-\frac{\mu}{2}}\cdot y^{-\frac14-\frac{\upsilon}{2}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $C_{\mu,\upsilon}^{(1)} = C_{\mu}^{(1)}\cdot C_{\upsilon}^{(1)}$ $(\mu,\ \upsilon = 0,1,2,...)$ и формально удовлетворяет уравнению в частных производных (4.3).

Аналогичным образом, учитывая знаки в определяющих уравнениях, получим еще три ряда в виде произведения поднормальных рядов:

$$\begin{aligned} U_{21}(x,y,\theta,\theta') \sim \exp(2\cdot\sqrt{\theta}x-2\sqrt{\theta}'y)\cdot\textstyle\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(2)}\cdot x^{-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\mu}{2}}\cdot y^{-\frac14-\frac{\upsilon}{2}}; \\ U_{12}(x,y,\theta,\theta') \sim \exp(-2\cdot x-2\sqrt{\theta}'y)\cdot\textstyle\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(3)}\cdot x^{-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\mu}{2}}\cdot y^{-\frac14-\frac{\upsilon}{2}}; \\ U_{22}(x,y,\theta,\theta') \sim \exp(-2\cdot\sqrt{\theta}x-2\sqrt{\theta}'y)\cdot\textstyle\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(4)}\cdot x^{-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\mu}{2}}\cdot y^{-\frac14-\frac{\upsilon}{2}}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $C_{\mu,\upsilon}^{(2)} = C_{\mu,\upsilon}^{(1)}\cdot C_{\mu,\upsilon}^{(2)}$, $C_{\mu,\upsilon}^{(3)} = C_{\mu}^{(2)}\cdot C_{\upsilon}^{(1)}$, $C_{\mu,\upsilon}^{(4)} = C_{\mu}^{(2)}\cdot C_{\upsilon}^{(2)}$.

Все полученные решения (4.5) формально удовлетворяют уравнению в частных производных (4.3), и $U_j(x,y;\theta,\theta')$ $(j=1,2,3,4)$ являются функциями Матье двух переменных, представленных в виде произведения поднормальных рядов.

Следуя Н.В. Мак - Лахлан [8; 1], введем обозначения $Cl_j(x,\theta)$ и $Cl_i(y,\theta')$ $(i=1,2)$ для поднормальных решений уравнений (4.1) и (4.2):

$$Cl_i(x,\theta) \sim \exp(\pm 2\cdot\theta^{\frac12}\sin(x))\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu}^{(1)}\cdot\sin(x); \tag{4.6}$$

$$Cl_i(y,\theta') \sim \exp(\pm 2\cdot\theta^{\frac12}\sin(y))\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\upsilon}^{(1)}\cdot\sin(y)^{-\frac12-\upsilon}. \tag{4.7}$$

Тогда по аналогии (3.17) и (4.5) составим четыре функции Матье в виде произведения:

$$\begin{aligned} Cl_{11}(x,y;\theta,\theta') \sim \exp\left(2\theta^{\frac12}\sin(x)+(2\theta')^{\frac12}\sin(y)\right)\cdot\textstyle\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(1)}\cdot\sin(x)^{-\frac12-\mu}\cdot\sin(y)^{-\frac12-\upsilon}; \\ Cl_{21}(x,y;\theta,\theta') \sim \exp\left(2\theta^{\frac12}\sin(x)+(2\theta')^{\frac12}\sin(y)\right)\cdot\textstyle\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(2)}\cdot\sin(x)^{-\frac12-\mu}\cdot\sin(y)^{-\frac12-\upsilon}; \\ Cl_{12}(x,y;\theta,\theta') \sim \exp\left(2\theta^{\frac12}\sin(x)+(2\theta')^{\frac12}\sin(y)\right)\cdot\textstyle\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(3)}\cdot\sin(x)^{-\frac12-\mu}\cdot\sin(y)^{-\frac12-\upsilon}; \\ Cl_{22}(x,y;\theta,\theta') \sim \exp\left(2\theta^{\frac12}\sin(x)+(2\theta')^{\frac12}\sin(y)\right)\cdot\textstyle\sum_{\mu,\upsilon=0}^{\infty} C_{\mu,\upsilon}^{(4)}\cdot\sin(x)^{-\frac12-\mu}\cdot\sin(y)^{-\frac12-\upsilon}, \end{aligned}$$

где $C_{\mu,\upsilon}^{(2)} = C_{\mu,\upsilon}^{(1)}\cdot C_{\mu,\upsilon}^{(2)}$, $C_{\mu,\upsilon}^{(3)} = C_{\mu}^{(2)}\cdot C_{\upsilon}^{(1)}$, $C_{\mu,\upsilon}^{(4)} = C_{\mu}^{(2)}\cdot C_{\upsilon}^{(2)}$.

Таким образом, применение метода Фробениуса-Латышевой позволило нам проанализировать возможности построения нормальных, поднормальных и нормально регулярных решений алгебраического уравнения Матье (1.3). Значительное внимание было обращено на более сложный для исследования случай иррегулярной особой точки $x = \infty$. Уточнены особенности существования формальных поднормальных решений и впервые рассмотрены произведения поднормальных рядов Матье как решения уравнения в частных производных второго порядка (4.3). Убедились также, что построенные таким образом поднормальные решения (3.12) алгебраического уравнения Матье (3.2) являются решениями исходного с периодическими коэффициентами уравнения (1.2). Показано, что решения в этом случае представляются в виде (3.17).

Работа выполнена по гранту КН МОН РК «Качественные исследования некоторых аналитических и периодически-краевых задач для систем дифференциальных уравнений». Государственный регистрационный номер №0113РК00686.Руководитель темы — академик Кенжебаев К.К.

Список литературы

1 *Mathieu E.* Memoire sur le movement vibratoire dune membrane de forme elliptique // Journal de Math. Pures et Appliquees.(Jour. de Lioville) 1868, — Vol. 13. — No. 137.

2 *Бейтмен Г., Ердейи А.* Высшие транцендентные функции. — Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Мытье. М.:Наука, 1967. — 299 с.

3 *Ince E.L.* Proc. Royal Soc, Edinburgh 1932: — Vol. 52. — P. 355-433.

4 *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* A course of Modern Analysis.Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функци. ГИФМЛ, М: 1963. — 515 с.

5 *Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С.* Нормально-регулярные решения и их приложения. Киев: Вища школа, 1974. — 136 с.

6 *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. — М: Наука, 1988. — 384 с.

7 *Корнев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. — М.: Наука, 1971. — 287 с.

8 *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приближения функций Матье. — М.: ИЛ, 1947. — 474 с.

Ж.Н.Тасмамбетов

Фробениус-Латышева әдісін пайдаланып Матье теңдеуінің шешімін құру туралы

Мақалада Матьенің алгебралық теңдеуінің қалыпты, іштей қалыпты және регуляр-қалыпты шешімдерін Фробениус-Латышева әдісін пайдаланып құру мүмкіндіктері зерттелген. Матьенің іштей қалыпты шешімдерінің көбейтінділері қарастырылған және Матьенің іштей қалыпты қатарларының көбейтінділері шешімдері болып табылатын екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу орнатылған. Іштей қалыпты шешімнің коэффициенті периодты бастапқы Матье теңдеуінің де шешімі болатындығы да дәлелденген.

Zh.N.Tasmambetov

On the construction of solutions of the Mathieu equation by Frobenius-Latysheva method

The possibilities of building normal, subnormal and normal-regular solutions of Mathieu algebraic equation by using Frobenius-Latysheva method are studied. The products of Mathieu subnormal series are considered. It is established a second order partial differential equation the solutions of which are the products of Mathieu subnormal series. It is also shown that this subnormal solutions a solution of the initial Mathieu equation with periodic coefficients.

References

1 Mathieu E. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees,1868*, 13,137

2 Beytmen G., Erdeli A. *Higher Transcendental Functions*, 1955, 299 p.

3 Ince E.L. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.* Sect. Mathematics, 1932, 52, p. 355 - 433.

4 Wittaker E.T., Watson G.N. *A course of Modern Analysis,* — 2. Transcendental functions, Cambridge: At the University Press, 1927, 515 p.

5 Latysheva K.Ya.,*TereschenkoN.I., Orel G.S. Normal-regular solutions and their applications,* Kiev: Vicsha shkola, 1974, 136 p.

6 Suetin P.K. *Two variables orthogonal polynomials,* Moscow: Nauka, 1988, 384 p.

7 Korenev B.G.*Introduction to the theory of Bessel functions,* Moscow: Nauka, 1971, 287 p.

8 Mac Lachlan N.W. *Theory and Mathieu functions,* Oxford: Clarendon Press, 1947, 474 p.