Әдебиеттер тізімі

1. *Пантелеев А.В., Киреев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 2004. — 480 с.
2. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 784 с.
3. *Культин Н.Б.* Программирование в Turbo Pascal 7.0 и Delphi. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ–Санкт-Петербург, 1999. — 416 с.
4. *Бартеньев О.В.* Фортран для студентов. — М.: Диалог-МИФИ, 1999. — 400 с.

УДК 510.53

Д.А.Тусупов

Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати

ОПРЕДЕЛИМЫЕ ОТНОШЕНИЯ, ИЗОМОРФИЗМЫ И СЕМЕЙСТВА СКОТТА СТРУКТУРЫ С ДВУМЯ БИНАРНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

Симметриялық, иррефлексивтік графты екі орындық екі предикатты құрылымға анықтамалық әдіс жасалған. Осы әдіспен екі орындық екі предикатты құрылымның семантика және синтаксис қасиеттері анықталған. Әдістеме екі құраманы бір-біріне енгізу жолдарын көрсетеді.

In paper author constructed the method of definability of symmetry, irreflexive graphs on the structure with two binary predicates. This method found syntax and semantic conditions of structure with two binary predicates. This method used to solution of problem of realization of structures.

Предварительные сведения

Выбор направления исследования обусловлен тем, что изучение структурных и вычислительных свойств алгебраических объектов посредством понятия определимости является одним из мощных методов в теории вычислимости и теории моделей. Исследование посвящено одному из интенсивно изучаемых областей в этом направлении, а именно проблемам определимости и алгоритмической сложности отношений над алгебраическими структурами.

Всякий раз, как только появляются интересные с точки зрения вычислимости результаты, возникают естественные вопросы о существовании структур с такими же свойствами в известных алгебраических классах, как группы, кольца, решетки, графы и т.п.

S.S.Goncharov, V.S.Harizanov, J.F.Knight и др. [1] показали существование структур с интересными вычислительными и синтаксическими свойствами. Аналог данных результатов доказан для классов алгебраических структур, таких как метаабелевы группы простой экспоненты и без кручения, решеток, колец, коммутативных полугрупп, областей целостности.

Определение. Пусть дана структура A сигнатуры σ, и $\phi(\overline{x})$ — произвольная формула языка данной сигнатуры; $\phi(\overline{x})$ — список k различных переменных. Определим k-местный предикат $\phi^A[\overline{x}] \rightleftharpoons \{\overline{a} : \overline{a} \in |A|^k,\ A \models \phi(\overline{a})\}$, который назовем Θ-формульным на структуре A или определимым Θ-формулой, если ϕ является Θ-формулой.

Определение. Отношение на $|A|$ назовем формульно определимым на A, если оно является формульным предикатом.

Пусть даны структуры A сигнатуры σ_0 и B сигнатуры σ_1. Не уменьшая общности, положим $|A| \subseteq |B|$.

Определение. Назовем структуру B σ_1-замыканием структуры A, а структуру A — σ_0-ядром (ядром) структуры B, если выполняются условия:

– (а) $|A| \subseteq |B|$;

– (б) $|A|$ — инвариантное подмножество в B, т.е. для любого автоморфизма f структуры B имеет место условие $f(|A|) = |A|$;

– (в) для любого предиката $Q_k^{n_k} \in \sigma_1$ отношение $Q_k^{n_k}$, ограниченное на $|A|$, является σ_0-определимым.

Определение. Назовем вычислимое замыкание *B* эффективным над вычислимым ядром *A*, если:

– (а) любая конструктивизация структуры *A* продолжается до конструктивизации структуры *B*;

– (б) для любой конструктивизации μ структуры *B* эффективно найдутся конструктивизация ν структуры *A* и вычислимая функция *f* такие, что $\nu(n) = \mu(f(n))$ для всех $n \in \omega$.

Простая проверка определений позволяет сформулировать

Предложение 1. *Пусть A является вычислимым ядром структуры B и B является вычислимым ядром структуры C, тогда A является вычислимым ядром структуры C.*

Введем определение вычислимой (формульной) определимости для класса структур различной сигнатуры, которое является уточнением понятий относительной интерпретации классов структур, предложенное А.И.Мальцевым [2], и относительной, элементарной определимости классов структур, введенное Ю.Л.Ершовым [3].

Определение. Пусть K_0 и K_1 — классы вычислимых структур сигнатуры $\sigma_0 = \left\langle P_i^{n_i} : i = 1, \ldots, k \right\rangle$ и σ_1 соответственно. Будем говорить, что класс K_0 вычислимо определим в классе K_1, если существуют вычислимые бескванторные формулы языка сигнатуры σ_1: $\phi_0(\overline{x}, \overline{y_0}), \phi_1(\overline{x}, \overline{y}_0, \overline{y}_1), \ldots, \phi_k(\overline{x}, \overline{y}_0, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k)$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{\mathrm{y}}_i = (y_0^i, \ldots, y_{m_i}^i)$, $i \in \{0, \ldots, k\}$, что для любой структуры $A \in K_0$ найдется структура $B \in K_1$ и параметры $c_1, \ldots, c_n \in |\mathrm{B}|$, удовлетворяющие условиям:

– (а) множество $\overline{B} = \{\overline{b} : \overline{b} \in |B|^m, B \models \phi_0(\overline{c}, \overline{b})\}$;

– (б) формула $\phi_1(\overline{c}, \overline{y}_0, \overline{y}_1)$ определяет конгруэнцию η на структуре $\overline{B} = \left\langle \overline{B}, Q_1, \ldots, Q_k \right\rangle$, где n_i — местные отношения Q_i для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$, соответствуют формулам $\phi_i(\overline{x}, \overline{y}_0, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_i)$;

– (в) структура $\overline{B} / \eta$ изоморфна структуре *A*.

Определение. Пусть $K_0 = \{A\}$, $K_1 = \{B\}$. Если класс K_0 вычислимо определим в классе K_1, тогда будем говорить, что структура *A* вычислимо определима в структуре *B*.

Данные определения позволяют утверждать следующее очевидное свойство понятия вычислимой определимости.

Предложение 2. *Если класс моделей K_0 вычислимо определим в классе K_1, а класс моделей K_1 вычислимо определим в классе K_2, то класс моделей K_0 вычислимо определим в классе K_2.*

Следствие 2. *Если класс моделей K^* содержит класс моделей K_1 и класс моделей K_0 вычислимо определим в классе K_1, тогда класс моделей K_0 вычислимо определим в классе K^*.*

Определение. Пусть *A* и *B* — вычислимые структуры. Структуры *A* и *B* являются Δ_1^0-подобными, если выполняется одно из условий:

– (а) *A* вычислимо определима в *B* и *B* — эффективное замыкание *A*;

– (б) *B* вычислимо определима в *A* и *A* — эффективное замыкание *B*;

– (в) $|A| = |B|$ и структуры взаимно вычислимо определимы.

Под сложностью структуры понимаем сложность атомной диаграммы относительно тьюринговых степеней. Через deg(*A*) обозначим сложность множества *A*.

Пусть даны вычислимые структуры A_η, B_{i,η_i}, $i = 0, 1$, и изоморфизмы $f_i : A_i \to B_{i,\eta_i}$ с условием $f_i * \eta = \eta_i * \varphi_i$, где $\varphi_i - \Delta_\alpha^0$-(вычислимые) функции. Тогда f_i называется Δ_α^0 изоморфизмом из A_η A_η на B_{η_i}.

Если функции φ_{i_0} и φ_{i_1} являются Δ_α^0-эквивалентными, тогда изоморфизмы f_0 и f_1 называются Δ_α^0-эквивалентными и структуры B_{i,η_i}, $i = 0, 1$ Δ_α^0-изоморфно эквивалентными.

Число вычислимых представлений относительно Δ_α^0 изоморфизмов с точностью до Δ_α^0-эквивалентности называется Δ_α^0-размерностью структуры *A*.

Пусть *A* является структурой и *U* — отношение на основном множестве $|A|$. Пусть *A* — вычислимая структура. Отношение *U* назовем внутренне Σ_α^0 отношением, если для всех вычислимых представлений структуры *A* образ отношения *U* является Σ_α^0 множеством. Отношение *U* назовем относительно внутренне $\sum_\alpha^0$ отношением, если для всех $B \cong A$ образ отношения U является $\sum_\alpha^0(B)$ множеством.

Пусть A — вычислимая структура. Мы говорим, что структура A вычислима, Δ_α^0-категорична, если для всех вычислимых структур B, изоморфных структуре A, существует вычислимый Δ_α^0-изоморфизм из A на B. Мы говорим, что A относительно вычислима (относительно Δ_α^0-) категорична, если для всех структур B, изоморфных структуре A, существует deg(B)-вычислимый ($\Delta_\alpha^0(B)$-) изоморфизм из A на B.

Существуют синтаксические условия, которые влекут Δ_α^0-категоричность и относительную Δ_α^0-категоричность. Семейством Скотта для структуры A называется множество формул Φ с фиксированным конечным кортежем параметров из $|A|$ таких, что:

1) любой кортеж из $|A|$ удовлетворяет некоторой формуле φ из Φ;

2) если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют одной и той же формуле из Φ, тогда существует автоморфизм структуры A, переводящий $\bar{a}$ в $\bar{b}$.

Вычислимо перечислимое (в дальнейшем сокращаем как в.п.) семейство Скотта, состоящее из конечных $\exists$-формул, называется формально вычислимо перечислимым семейством Скотта. Формально $\sum_\alpha^0$-семейство Скотта есть $\sum_\alpha^0$-семейство, состоящее из вычислимых $\sum_\alpha$ формул языка $L_{\omega_1,\omega}$.

В [4] Д.А.Тусуповым доказаны следующие результаты:

Теорема 1. Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует симметрический, иррефлексивный граф, который является Δ_α^0-категоричным, но не относительно Δ_α^0-категоричным (и без формально $\sum_\alpha^0$-семейства Скотта).

Обобщение результата Манасса об отношениях, которые наследственно вычислимо перечислимые, но являются не относительно наследственно вычислимо перечислимыми.

Теорема 2. Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует симметрический, иррефлексивный граф с отношением, которое является наследственно $\sum_\alpha^0$, но не относительно наследственно $\sum_\alpha^0$-отношением.

Обобщение результата С.С.Гончарова о структурах конечной вычислимой размерности.

Теорема 3. Для каждого вычислимого ординала-последователя α и каждого конечного n существует симметрический, иррефлексивный граф Δ_α^0-размерности n.

Обобщение результатов Сламана и Винера о структурах, имеющих представления во всех степенях, за исключением нулевой.

Теорема 4. Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует симметрический, иррефлексивный граф, имеющий представления только в степенях таких множеств X, что имеет место $\Delta_\alpha^0(X) \neq \Delta_\alpha^0$.

В частности, для каждого конечного n существует симметрический, иррефлексивный граф, имеющий представления, только в не n-низких степенях.

§1 Структура с двумя бинарными предикатами

Рассмотрим сигнатуру $\sigma_1 = \langle E, R \rangle$, состоящую из эквивалентности E и частичного порядка R.

Отношение $E(x,y)$ называется эквивалентностью на структуре G, если для всех элементов x,y,z из $|G|$ выполняются условия:

– $E(x,x)$;

– $E(x,y) \to E(y,x)$;

– $(E(x,y) \wedge E(y,z)) \to E(x,z)$.

Отношение $R(x,y)$ называется частичным порядком на структуре G, если для всех элементов x,y,z из $|G|$ выполняются условия:

– $R(x,x)$;

– $R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y$;

– $(E(x,y) \wedge E(y,z)) \to E(x,z)$.

Пусть G — симметрический граф, существование которого доказано в [4]. Пусть $\sigma_0 = \langle G^2 \rangle$ — сигнатура графа. Обозначим отношение $R(x, y)$ через $x < y$.

Предложение 3. Для любого бесконечного симметрического графа A существует структура A_0 сигнатуры $\sigma_1 = \langle E, R \rangle$ такая, что существует эффективная процедура построения для любой *d*-вычислимой нумерации μ графа A, соответствующей *d*-вычислимой конструктивизации ν_μ структуры A_0, и имеют место следующие условия:

1) ν_μ не автоэквивалентна $\nu_{\mu'}$ $\Leftrightarrow$ μ не эквивалентна μ';

2) для любой конструктивизации ν структуры A_0 существует конструктивизация μ графа A такая, что конструктивизации ν и ν_μ автоэквивалентны;

3) если граф A не имеет формально $\sum_\alpha^0$ семейства Скотта, то и структура A_0 не имеет формально $\sum_\alpha^0$ семейства Скотта;

4) структуры A и A_0 являются Δ_1^0-подобными.

Доказательство. Пусть A — счетный бесконечный симметрический граф и $|A| = \{i : i \in \omega\}$. Определим структуру A_0 следующим образом:

$$\exists x, y, z(\neg E(x, y) \wedge \neg E(x, z) \wedge \neg E(y, z)) \wedge$$
$$\wedge \forall w((w \neq x \wedge w \neq y \wedge w \neq z) \to (E(x, w) \wedge E(y, w) \wedge E(w, z)).$$

Обозначим классы эквивалентности через

$$B = \{b_i : i \in \omega\}, C = \{c_i : i \in \omega\}, D = \{d_i : i \in \omega\}.$$

Для любой пары (c_i, c_j) существует единственный элемент $b_{<i,j>}$ из B либо единственный элемент $d_{<i,j>}$ из D такой, что

$$((c_i < b_{<i,j>}) \wedge (c_j < b_{<i,j>}) \wedge (d_{<i,j>} < b_{<i,j>})) \vee ((c_i > d_{<i,j>}) \wedge (c_j > d_{<i,j>}) \wedge (d_{<i,j>} > b_{<i,j>})).$$

3. $A \models G(g_i, g_j) \Rightarrow ((c_i < b_{<i,j>}) \wedge (c_j < b_{<i,j>}) \wedge (d_{<i,j>} < b_{<i,j>}))$;

$A \models \neg G(g_i, g_j) \Rightarrow ((c_i > d_{<i,j>}) \wedge (c_j > d_{<i,j>}) \wedge (d_{<i,j>} > b_{<i,j>}))$.

4. $E(x, y) \to (\neg(x < y) \wedge \neg(y < x))$.

Пусть A и A' — два изоморфных вычислимых графа, φ — изоморфизм такой, что $i \mapsto \varphi(i)$. Определим изоморфизм φ^* из структуры A_0 в структуру A_0' следующим образом:

$$c_i \mapsto c'_{\varphi(i)}; b_{<i,j>} \mapsto b'_{<\varphi(i),\varphi(i)>}; d_{<i,j>} \mapsto d'_{<\varphi(i),\varphi(i)>}.$$

Лемма 1. Граф A формульно определим в структуре A_0.

Доказательство. Определим отношения:

$$C(x) = \{x : \exists y \exists z(y < x < z)\};$$
$$F(x, y) = \{(x, y) : \exists z((x < z) \wedge (y < z))\};$$
$$\neg F(x, y) = \{(x, y) : \exists z((x > z) \wedge (y > z))\}.$$

Отношение $C(x)$ d-вычислимо, так как классы эквивалентности, определяемые отношением E^2, вычислимо перечислимы относительно степени d и, в частности, определяются формулами

$$B(x) = \{x : \exists y \exists z(y < z < x)\};$$
$$D(x) = \{x : \exists y \exists z(y > z > x)\}.$$

Имеет место соотношение $|A_0| = C \cup B \cup D$.

Рассмотрим структуру $C \rightleftharpoons \langle C, F \rangle$ и изоморфизм между структурой A и C. Пусть *f* — однозначное соответствие из *A* на *C* такое, что $f(i) = c_i$ и

$$A \models G(i, j) \Leftrightarrow C \models F(c_{f(i)}, c_{f(j)}).$$

Тогда *f* есть изоморфизм. Лемма доказана.

Пусть A и B — изоморфные структуры и φ есть изоморфизм. Определим изоморфизм φ^* из A_0 на B_0, индуцированный изоморфизмом φ, следующим образом:

$$\varphi^*(c_i) = c_{\varphi(i)}; \quad \varphi^*(b_{<i,j>}) = b_{<\varphi(i),\varphi(j)>}; \quad \varphi^*(d_{<i,j>}) = d_{<\varphi(i),\varphi(j)>}.$$

Через $Iz(A,B)$ обозначим множество всех изоморфизмов из A на B.

Лемма 2. Отображение из $Iz(A,B)$ на $Iz(A_0,B_0)$ является биекцией.

Доказательство. Пусть $\varphi^*: A_0 \to B_0$, тогда отображение $\psi = \varphi^* \downarrow C(A_0)$ есть изоморфизм из структуры $C(A_0)$ на структуру $C(B_0)$, где $\varphi^* \downarrow C(B_0)$ означает ограничение отображения φ^* на множество $C(A_0)$. Пусть f_0 — изоморфизм структуры A на структуру $C(A_0)$ и f_1 — изоморфизм структуры B на структуру $C(B_0)$, тогда отображение $\varphi = f_1^{-1} \cdot \varphi * \cdot f_0$ есть изоморфизм структуры A на структуру B. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть μ_0 и ν_0 — конструктивизации A и A_0 соответственно, тогда для каждой вычислимой структуры $A_0^{'}$ сигнатуры σ_1, которая d-изоморфна вычислимой структуре A_0, существует конструктивизация μ структуры A сигнатуры σ_0 такая, что вычислимая структура (A_0, ν_μ), соответствующая вычислимой структуре (A,μ), есть структура сигнатуры σ_0 и является d-изоморфной вычислимой структуре (A_0, ν_0).

Доказательство. Пусть $A_0^{'}$ — структура, d-изоморфная вычислимой структуре A_0 сигнатуры σ_1, и φ^* есть этот изоморфизм. Пусть h — вычислимая биекция из ω на $C(A_0^{'})$. Определим вычислимый предикат G^* на $|A|$ так, чтобы для всех $i,j \in \omega$ из условия $A_0^{'} \models F(h(i),h(j))$ следовало бы $A \models G^*(i,j)$. Тогда существует конструктивизация μ структуры A. Обозначим через $A^* = (A,\mu)$ нумерованную структуру A с конструктивизацией μ. Здесь мы определим изоморфизм $\zeta = \mu \cdot h$ из $C(A_0^{'})$ на $C(A_0^*)$ такой, что

$$F^{A_0^{'}}(x,y) \Leftrightarrow G^*(h(x),h(y)) \Leftrightarrow G(\mu \cdot h(x), \mu \cdot h(y)) \Leftrightarrow F^{A_0^{'}}(c_{\mu(x)}, c_{\mu(y)}).$$

Тогда существует изоморфизм φ^* из A_0 на A_0^*, который расширяет изоморфизм ζ и является d-изоморфизмом. Мы обозначим A_0^* как (A_0, ν_μ), тогда (A_0, ν_0) и (A_0, ν_μ) являются d-изоморфными. Лемма доказана.

Лемма 4. Если существует формально Σ_α^0-семейство Скотта для структуры A_0 сигнатуры σ_1, тогда существует формально Σ_α^0-семейство Скотта для структуры A сигнатуры σ_0.

Доказательство. Структура, изоморфная структуре, определимой в структуре A_0 вычислимой формулой, и все базисные предикаты структуры A находятся через булеву комбинацию $\exists$-формул. Следовательно, структура $C(A_0)$ сигнатуры σ_0 определяется вычислимым множеством Σ_α-формул. Такое множество является Σ_α^0-семейство Скотта. Лемма доказана.

§2 Основные результаты

Доказанное выше предложение позволяет утверждать следующее о структуре с эквивалентностью и частичным порядком.

Теорема 1. Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует структура Δ_α^0-категоричная, но не относительно Δ_α^0-категоричная (и без формально $\sum_\alpha^0$-семейства Скотта).

Теорема 2. Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует вычислимая структура с отношением, которое является внутренне $\sum_\alpha^0$, но не относительно внутренним $\sum_\alpha^0$ отношением.

Теорема 3. Для каждого вычислимого ординала-последователя α и каждого конечного n существует структура Δ_α^0 размерности n.

Теорема 4. Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует структура, имеющая представления только в степенях таких множеств X, что имеет место $\Delta_\alpha^0(X)$, но не Δ_α^0. В частности, для каждого конечного n существует структура, имеющая представления только в $non-low_n$ степенях.

Список литературы

1. *Goncharov S.S., Harizanov V.S., Knight J.F. a.o.* Enumerations in computable structure theory // Annals of Pure and Applied Logic. — 2005. — Vol. 136. — № 3. — P. 219–246.
2. *Мальцев А.И.* Конструктивные алгебры. I // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16. — № 3. — С. 3–60.
3. *Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980. — 416 с.
4. *Тусупов Д.А.* Ориентированный граф конечной Δ_{α}^{0} - размерности // Вестн. НГУ. Сер. матем. — 2007. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 104–115.

ӘОЖ 510.67

Л.С.Фазылова, А.Е.Сланбекова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

АЛГЕБРАЛЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ТҮБІРЛЕРІН АЙЫРУ

Рассмотрены аналитические и графические методы отделения действительных корней нелинейных уравнений, приведены примеры построения графиков нелинейных функций с использованием пакета прикладных программ Matlab.

Present work explains analytic and graphic methods of separating of real solutions of nonlinear equations. Given examples of graphing of nonlinear functions with using applied program Matlab.

Бұл жұмыста

$$f(x)=0 \tag{1}$$

теңдеуінің түбірлерін табудың кейбір әдістері берілген. Мұндағы x — нақты немесе комплекс сан; $f(x)$ — осы x аргументіне тәуелді көпмүше немесе трансценденттті функция.

Егер $f(x)$ алгебралық көпмүше болса, онда 5-дәрежелі көпмүшеге дейін ғана $f(x)=0$ теңдеуінің түбірлерін дайын формулалар арқылы есептеуге болатыны белгілі. Ол үшін төмендегі екі мәселені шешу қажет болады [1]:

1) түбірлерді айыру, яғни ішінде тек бір ғана түбір жататын кіші облыстарды анықтау;

2) теңдеудің түбірін берілген дәлдікпен есептеп шығару.

Біз $f(x)\equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ түрінде берілген теңдеуді n дәрежелі алгебралық теңдеу, ал

$$f(x)=ax+b\sin x-c=0,\ f(x)=ae^x+bx-c=0,\ f(x)=a\lg x+b\sin x-c=0$$

түрінде, яғни құрамы көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық, кері тригонометриялық функциялардан тұратын теңдеулерді трансценденттік теңдеулер дейміз.

Сондықтан көбінесе үш, төрт дәрежелі алгебралық, тригонометриялық, логарифмдік теңдеулерді немесе теңдеулер жүйелерін шешу қажет болады. Жалпы алғанда мұндай есептерді теңдеулердің дәл шешімдерін табу міндетті емес, жуық шешімдері табылса болғаны.

Ал трансценденттік теңдеулердің шешімдерін табудың жалпы әдісі жоқ. Сондықтан көптеген мәселелердің шешуі түптеп келгенде алгебралық немесе трансценденттік теңдеулерді алдын ала берілген дәлдікпен жуықтап шешуге келіп тіреледі.

Теңдеулердің шешімдерін (түбірлерін) жуықтап табудың қандай әдісі болмасын, алдымен олардың нақты түбірлеріне жақын санды (бастапқы мән) табу мәселесін шешпей болмайды.

Түбірлерді айыру тәсілдерін қарастырайық.