

Н.А.Абиев

Тараский государственный университет им. М.Х.Дулати
(E-mail: abievn@mail.ru)

О линеаризации системы нелинейных ОДУ, возникающей при исследовании потоков Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха

В статье рассмотрены нормализованные потоки Риччи, которые на обобщенных пространствах Уоллаха сводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Основным результатом работы является нахождение удобных формул для матрицы линейных частей рассматриваемой системы в важном частном случае $a_i = a_j, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$.

Ключевые слова: инвариантная риманова метрика, эйнштейнова метрика, обобщенное пространство Уоллаха, поток Риччи, динамическая система, система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, особая точка.

Введение. В настоящей работе мы рассматриваем следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученную в [1]:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, x_3); \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2, x_3); \frac{dx_3}{dt} = h(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_1 x_1 \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) + x_1 B; \\ g(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_2 x_2 \left(\frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \right) + x_2 B; \\ h(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_3 x_3 \left(\frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} \right) + x_3 B; \\ B &:= \left(\frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)^{-1}; \\ &x_i = x_i(t) > 0; a_i \in (0, 1/2]; i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Система (1) возникает при изучении нормализованных потоков Риччи (см. [2, 3] для детального ознакомления с потоками Риччи) в специальных классах однородных многообразий (см. [4] для деталей). Пусть G/H — однородное компактное пространство с полупростой связной группой Ли G и её замкнутой подгруппой Ли H . Пусть представление изотропии p пространства G/H разлагается в прямую сумму трех попарно ортогональных и $Ad(H)$ -инвариантных неприводимых модулей: $p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$. В таких пространствах G/H , названных три-локально-симметрическими [5], или обобщенными, пространствами Уоллаха [6, 7], любая G -инвариантная риманова метрика $\rho = \rho(t)$ тождественна $ad(H)$ -инвариантному скалярному произведению $x_1(\cdot, \cdot)|_{p_1} \oplus x_2(\cdot, \cdot)|_{p_2} \oplus x_3(\cdot, \cdot)|_{p_3}$ при некоторых $x_i = x_i(t) > 0$, удовлетворяющих (1).

Согласно [4] инвариантная риманова метрика ρ называется эйнштейновой, если тензор Риччи $Ric(\rho)$ пропорционален ρ . Как следует из результатов [5, 6], в случае рассматриваемых пространств эйнштейновы метрики соответствуют (тождественны) особым точкам ($f = g = h = 0$) системы ОДУ (1).

Отмечая растущий интерес к потокам Риччи, являющимся объектом изучения как римановой геометрии, так и теории динамических систем, в наших дальнейших исследованиях мы, в основном, будем интересоваться вопросами классификации особых точек динамической системы (1) при ограничениях $a_i \in (0, 1/2]$, имеющих геометрическое происхождение (см. [5]).

1. Предварительные сведения. Как было установлено в [1], используя первый интеграл

$$x_1^{1/a_1} x_2^{1/a_2} x_3^{1/a_3} = 1, \tag{2}$$

систему (1) можно заменить эквивалентной системой из двух уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \tilde{f}(x_1, x_2); \quad \frac{dx_2}{dt} = \tilde{g}(x_1, x_2), \tag{3}$$

где $\tilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$; $\tilde{g}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$; $\varphi(x_1, x_2) = x_1^{-\frac{a_3}{a_1}} x_2^{-\frac{a_3}{a_2}}$. Очевидно, что функции $\tilde{f}(x_1, x_2)$, $\tilde{g}(x_1, x_2)$ являются аналитическими в достаточно малой окрестности произвольной точки (x_1^0, x_2^0) ; $x_1^0 > 0$; $x_2^0 > 0$, и поэтому имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2) &= j_{11} (x_1 - x_1^0) + j_{12} (x_2 - x_2^0) + F(x_1, x_2); \\ \tilde{g}(x_1, x_2) &= j_{21} (x_1 - x_1^0) + j_{22} (x_2 - x_2^0) + G(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где j_{ij} — элементы матрицы $J = J(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{x_1} & \tilde{f}_{x_2} \\ \tilde{g}_{x_1} & \tilde{g}_{x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)}$, а F, G — некоторые функции,

аналитические в окрестности (x_1^0, x_2^0) . Собственные значения матрицы $J = J(x_1^0, x_2^0)$ можно вычислить по формуле $\lambda_{1,2} = \frac{\rho \pm \sqrt{\sigma}}{2}$, где $\sigma := \rho^2 - 4\delta$; $\delta := \det(J)$ — определитель J ; $\rho := \text{trace}(J)$ — след J . Пусть без ограничения общности $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

Согласно известным результатам качественной теории ОДУ особая точка плоской нелинейной динамической системы может иметь следующие типы (см., например, [8]):

Невырожденный тип ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$). Следовательно, $J \neq 0$ и $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Такая точка может быть седлом, узлом, фокусом или центром.

Полугиперболический тип ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$). Следовательно, $J \neq 0, \delta = 0, \rho = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \sigma > 0$. Такая точка может быть седлом, узлом или седло-узлом;

Нильпотентный тип ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, J \neq 0$). Следовательно, $\delta = 0, \rho = 0, \sigma = 0$. Этот случай содержит седла, узлы, седло-узлы, фокусы, центры, точки возврата и т.д., всего может существовать 13 различных (топологически неэквивалентных) типов фазовых портретов в достаточно малой окрестности особой точки.

Линейно-нулевой тип ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, J = 0$). Ясно, что $\delta = 0, \rho = 0, \sigma = 0$. Как доказано в [9], в достаточно малой окрестности такой точки возможны 65 различных (топологически неэквивалентных) типов фазовых портретов.

Сложности в исследовании нелинейной системы и важный случай $a_i = a_j$, где $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Определение типов всевозможных особых точек нелинейной системы (3) и исследование их параметрических бифуркаций при произвольно заданной тройке параметров $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2]^3$ является достаточно сложной задачей. Хотя в работе [1] были получены некоторые общие результаты в этом направлении, тем не менее, более детальное определение типов особых точек системы (3) и их полная классификация все же не представляются возможными в общем случае. Например, опираясь на результаты [1], легко установить, что для нашей нелинейной системы (3) нильпотентный случай никогда не наступает, а линейно-нулевой случай может иметь место только при $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$.

Следовательно, если не $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$, то всякая вырожденная ($\delta = 0$) особая точка системы (3) является полугиперболической. Однако более точного вывода относительно типа этой точки (седло, узел или седло-узел) мы отсюда, к сожалению, получить не можем. Ввиду таких обстоятельств представляет самостоятельный интерес изучать специальные случаи, когда среди параметров $a_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$, могут оказаться совпадающие. Согласно [5] такие случаи имеют отношение к обобщенным пространствам Уоллаха следующего вида:

$$SO(l + 2m) / (SO(l) \times SO(m) \times SO(m)), Sp(l + 2m) / (Sp(l) \times Sp(m) \times Sp(m)), \text{ где } m \geq l > 1.$$

Как следует из результатов той же работы [5], при $a_i = a_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, система (1) может обладать только особыми точками (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , удовлетворяющими одному из следующих альтернативных условий: $x_1^0 = x_2^0$ или $x_3^0 = 2b(x_1^0 + x_2^0)$. В свою очередь, каждый из этих альтернативных случаев требует отдельного к себе внимания. Поэтому в этой и нескольких последующих работах наши исследования будут касаться только случая $x_1^0 = x_2^0$. Благодаря наличию симметрии в задаче, всюду в дальнейшем мы без ограничения общности можем полагать, что $a_1 = a_2 = b$, $a_3 = c$, где $b, c \in (0, 1/2]$. Пусть $D := 1 - 4(1 - 2c)(b + c)$. Тогда, согласно результатам [1, 5], система (1) имеет два семейства особых точек, если $D > 0$:

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (2(b+c)q, 2(b+c)q, \mu q), \text{ где } \mu = 1 + \sqrt{D}, \mu > 0, q \in R, q > 0; \quad (4)$$

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (2(b+c)q, 2(b+c)q, \mu q), \text{ где } \mu = 1 - \sqrt{D}, \mu > 0, q \in R, q > 0; \quad (5)$$

одно семейство особых точек, если $D = 0$:

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (2(b+c)q, 2(b+c)q, \mu q), \text{ где } \mu = 1, q \in R, q > 0; \quad (6)$$

и не имеет ни одного семейства особых точек, если $D < 0$.

Постановка задачи. Так как одним из основных приемов исследования нелинейных систем является их линеаризация, то возникает первоочередная необходимость нахождения формул для вычисления элементов матрицы $J = J(x_1^0, x_2^0)$ и таких её числовых характеристик, как $\delta := \det(J)$ и $\rho := \text{trace}(J)$. Исходя из всего изложенного выше, будем полагать, что (x_1^0, x_2^0) — произвольная особая точка системы (3), удовлетворяющая условию $x_1^0 = x_2^0$ при $a_1 = a_2 = b$, $a_3 = c$, где $b, c \in (0, 1/2]$.

2. Вспомогательные результаты. Прежде всего сформулируем и докажем две важные леммы, справедливые для общего случая $a_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$, и полезные не только в рамках решения поставленной в этой работе задачи.

Лемма 1. Пусть q, γ_i — положительные вещественные числа, $i = 1, 2, 3$. Тогда очевидно, что $(x_1^0, x_2^0) = (\gamma_1 q, \gamma_2 q)$ является особой точкой системы (3) тогда и только тогда, когда $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (\gamma_1 q, \gamma_2 q, \gamma_3 q)$ является особой точкой дифференциально-функциональной системы (1), (2), соответствующей единственному значению $q = (\gamma_1^{-1/a_1} \gamma_2^{-1/a_2} \gamma_3^{-1/a_3})^d > 0$, где $d = (1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3)^{-1} > 0$.

Доказательство. Непосредственно можно проверить, что условия

$$f(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = g(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = h(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0 \text{ и } (x_1^0)^{1/a_1} (x_2^0)^{1/a_2} (x_3^0)^{1/a_3} = 1$$

равносильны условиям $\gamma_1^{1/a_1} \gamma_2^{1/a_2} \gamma_3^{1/a_3} q^{1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3} = 1$ и $\tilde{f}(x_1^0, x_2^0) = \tilde{g}(x_1^0, x_2^0) = 0$. Лемма доказана.

Как показывает наша практика, попытка непосредственного вычисления частных производных функций $\tilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$ и $\tilde{g}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$ приводит к очень сложным выражениям, непригодным для какого-либо дальнейшего анализа. Мы предлагаем простой и в то же время эффективный способ вычисления производных.

Лемма 2. Пусть $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (\gamma_1 q, \gamma_2 q, \gamma_3 q)$, где $q, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — вещественные числа. Тогда для частных производных функций $\tilde{f}_{x_i}(x_1, x_2)$ и $\tilde{g}_{x_i}(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, в точке (x_1^0, x_2^0) справедливы формулы

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{x_i}(x_1^0, x_2^0) &= f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + f_{x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\varphi_{x_i}(x_1^0, x_2^0); \\ \tilde{g}_{x_i}(x_1^0, x_2^0) &= g_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + g_{x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\varphi_{x_i}(x_1^0, x_2^0),\end{aligned}$$

где $\varphi_{x_i}(x_1^0, x_2^0) = -\frac{a_3\gamma_3}{a_i\gamma_i}$.

Доказательство. Доказательство вытекает из известной формулы дифференцирования сложной функции. Лемма доказана.

3. Основной результат. Возвращаемся к точке (x_1^0, x_2^0) , описанной в постановке задачи. Сформулируем и докажем основную теорему настоящей работы.

Теорема 1. Пусть значения $b, c \in (0, 1/2]$ фиксированы и такие, что $D \geq 0$ при $\mu = 1 + \sqrt{D}$ и $0 \leq D < 1$ при $\mu = 1 - \sqrt{D}$. Тогда для каждого из семейств (4)–(6) справедливы следующие утверждения:

a) в зависимости от значения μ , соответствующего данному семейству, существует единственное положительное значение $q = (2(b+c))^{-2d/b} \mu^{-d/c} > 0$ такое, что точка

$$(x_1^0, x_2^0) = (2(b+c)q, 2(b+c)q) \quad (7)$$

является изолированной особой точкой системы (3), где $d = (2b^{-1} + c^{-1})^{-1}$;

b) в особой точке (7) матрица линейных частей $J = J(x_1^0, x_2^0)$ системы (3) имеет следующие элементы:

$$j_{11} = j_{22} = \frac{1 - 2(b+c)}{\mu q}; \quad j_{12} = j_{21} = \frac{4(b^2 - c^2) + 2(b+c) - \mu}{2(b+c)\mu q}, \quad (8)$$

где $\mu = 1 \pm \sqrt{D}$;

c) для следа $\rho := \text{trace}(J)$ и определителя $\delta := \det(J)$ матрицы $J = J(x_1^0, x_2^0)$ в точке (7) справедливы следующие формулы:

$$\rho := \text{trace}(J) = \frac{2(1 - 2(b+c))}{\mu q}; \quad \delta := \det(J) = \frac{D \pm \sqrt{D}}{4(b+c)^2 \mu^2 q^2} (8b(b+c) - \mu), \quad (9)$$

где выбор знака в $D \pm \sqrt{D}$ согласован с выбором знака в $\mu = 1 \pm \sqrt{D}$.

Доказательство. Все рассуждения, приводимые ниже, являются общими для случаев $\mu = 1 + \sqrt{D}$, $D \geq 0$ и $\mu = 1 - \sqrt{D}$, $0 \leq D < 1$. Отметим, что неравенство $D < 1$ обусловлено требованием $\mu > 0$ при $\mu = 1 - \sqrt{D}$. Несложный анализ показывает, что $D < 1$ равносильно $c < 1/2$. Поэтому случай $\mu = 1 - \sqrt{D}$ отличается от случая $\mu = 1 + \sqrt{D}$ лишь только тем, что для первого из них следует понимать $c \in (0, 1/2)$.

Теперь зафиксируем значения $b, c \in (0, 1/2]$ и рассмотрим точку (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , заданную одним из семейств (4)–(6).

a) Как показывает непосредственная подстановка в (1), (x_1^0, x_2^0, x_3^0) является изолированной особой точкой системы (1): $f(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = g(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = h(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$.

Существование единственного значения q , фигурирующего в (7), вытекает дальше из леммы 1.

b) Непосредственно вычисляя $f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $i = 1, 2, 3$, и используя лемму 2 с учетом равенств $\varphi_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = \varphi_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = -\frac{c\mu}{2b(b+c)}$, справедливых при $\gamma_1 = \gamma_2 = 2(b+c)q$ и $\gamma_3 = \mu$, получаем следующее:

$$j_{11} = \tilde{f}_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = -\frac{1}{4} \frac{8b^3 + 8c^3 + 32cb^2 + 32bc^2 - 4b^2 - 8bc - 4c^2 - 2c\mu + c\mu^2}{(b+c)(2c+b)\mu q};$$

$$j_{12} = \tilde{f}_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = \frac{1}{4} \frac{8b^3 - 8c^3 + 24cb^2 + 8bc^2 + 4bc + 4c^2 - (b+c)\mu^2 - 2c\mu}{(b+c)(2c+b)\mu q}. \quad (10)$$

Аналогичные вычисления показывают, что $j_{22} = j_{11}$ и $j_{21} = j_{12}$. После проведения некоторых тождественных преобразований в выражениях (10) с учетом равенства $\mu^2 = 1 + D \pm 2\sqrt{D}$ мы действительно приходим к формулам (8).

с) Первая из формул (9) очевидна. Покажем справедливость второй формулы в (9). Очевидно, что $\delta = \det(J) = (j_{11})^2 - (j_{12})^2 = (j_{11} - j_{12})(j_{11} + j_{12})$.

Теперь достаточно заметить, что

$$j_{11} - j_{12} = \frac{2(b+c) - 4(b+c)^2}{2(b+c)\mu q} - \frac{4(b^2 - c^2) + 2(b+c) - \mu}{2(b+c)\mu q} = -\frac{8b(b+c) - \mu}{2(b+c)\mu q},$$

$$j_{11} + j_{12} = \frac{2(b+c) - 4(b+c)^2}{2(b+c)\mu q} + \frac{4(b^2 - c^2) + 2(b+c) - \mu}{2(b+c)\mu q} = -\frac{D + \mu - 1}{2(b+c)\mu q} = -\frac{D \pm \sqrt{D}}{2(b+c)\mu q}.$$

Теорема доказана.

Заключение. Для особых точек вида (7), возникающих при $a_1 = a_2 = b$, $a_3 = c$, мы нашли формулы для нахождения $J := J(x_1^0, x_2^0)$; $\rho := \text{trace}(J)$ и $\delta := \det(J)$. Эти формулы повсеместно будут использоваться в наших дальнейших исследованиях, посвященных задаче классификации особых точек указанного вида.

Список литературы

- 1 Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Stasos P. The Ricci flow on generalized Wallach spaces // Preprint. — arXiv: 1305.0440. — 2013.
- 2 Chow B., Knopf D. The Ricci Flow: an Introduction. Mathematical Surveys and Monographs. — Vol. 110. AMS, Providence, RI, 2004. — 325 p.
- 3 Topping P. Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series. — Vol. 325. Cambridge University Press: Cambridge, 2006. — 133 p.
- 4 Бессе А.Л. Многообразие Эйнштейна. — М.: Мир, 1990. — Т. 1. — 318 с.
- 5 Ломшаков А.М., Никонов Ю.Г., Фурсов Е.В. Инвариантные метрики Эйнштейна на три-локально-симметрических пространствах // Математические труды. — 2003. — Т. 6. — № 2. — С. 80–101.
- 6 Никонов Ю.Г. Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна // Сиб. матем. журн. — 2000. — Т. 41. — № 1. — С. 200–205.
- 7 Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2007. — Vol. 146. — № 7. — P. 6313–6390.
- 8 Dumortier F., Llibre J., Artes J. Qualitative theory of planar Differential systems. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. — 298 p.
- 9 Jiang Q., Llibre J. Qualitative classification of singular points // Qualitative theory of Dynamical systems. — 2005. — Vol. 6. — № 1. — P. 87–167.

Н.А.Әбиев

Риччи ағымдарын жалпыланған Уоллах кеңістіктерінде зерттеуде пайда болатын сызықсыз қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін линеаризациялау туралы

Мақалада жалпыланған Уоллах кеңістіктерінде сызықсыз қарапайым дифференциалдық теңдеулердің жүйесіне келтірілетін нормалдастырылған Риччи ағымдары қарастырылды. Маңызды $a_i = a_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, дербес жағдайында зерттелген жүйенің сызықтық бөлігінің матрицасы үшін қолайлы формулаларды табу жұмыстың негізгі нәтижесі болып табылады.

N.A.Abiev

On linearization of the system of nonlinear ODEs appearing at investigations of Ricci flows on generalized Wallach spaces

In the paper we consider the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces that could be reduced to a system of nonlinear ODEs. As a main result we get the convenient formulas for the matrix of linear parts of the considered system in the important partial case $a_i = a_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

References

- 1 Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. *Preprint, arXiv: 1305.0440*, 2013.
- 2 Chow B., Knopf D. *The Ricci Flow: an Introduction. Mathematical Surveys and Monographs*, 110, AMS, Providence, RI, 2004, 325 p.
- 3 Topping P. *Lectures on the Ricci flow. London Mathematical Society Lecture Note Series*, 325. Cambridge University Press: Cambridge, 2006, 133 p.
- 4 Besse A.L. *Einstein manifolds*, 1, Moscow: Mir, 1990, 318 p.
- 5 Lomshakov A.M., Nikonorov Yu.G., Firsov E.V. *The mathematical papers*, 2003, 6, 2, p. 80–101.
- 6 Nikonorov Yu.G. *Siberian Mathematical Journal*, 2000, 41, 1, p. 200–205.
- 7 Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2007, 146, 7, p. 6313–6390.
- 8 Dumortier F., Llibre J., Artes J. *Qualitative theory of planar Differential systems. Universitext*. Springer-Verlag, Berlin, 2006, 298 p.
- 9 Jiang Q., Llibre J. *Qualitative theory of Dynamical systems*, 2005, 6, 1, p. 87–167.

УДК 514.765 + 517.938

Н.А.Абиев

Тараский государственный университет им. М.Х.Дулати (E-mail: abievn@mail.ru)

О необходимых и достаточных условиях появления вырожденных особых точек потоков Риччи

В статье рассмотрены нормализованные потоки Риччи, которые на обобщенных пространствах Уоллаха сводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для такой системы найдены необходимые и достаточные условия появления вырожденных особых точек вида $x_1^0 = x_2^0$ в случае $a_i = a_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

Ключевые слова: обобщенное пространство Уоллаха, поток Риччи, динамическая система, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, вырожденная особая точка.

Введение. В настоящей работе рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная в [1]:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = h(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

где

$$f(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_1 x_1 \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) + x_1 B;$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_2 x_2 \left(\frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \right) + x_2 B;$$