

Бөрітаев Р.
4 курс студенті, академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды
университеті
Муратхан Р.
PhD, қауымдастырылған профессор академик Е.А.Бөкетов
атындағы Қарағанды университеті

ТАСЫМАЛДАУДАҒЫ ЕҢ КІШІ АРА ҚАШЫҚТЫҚ ЕСЕБІН МОДЕЛЬДЕУ

Бұл мақалада бағытталған графтағы ең қысқа жолды табу мәселелерін қарастырамыз. Барлық доғаларында теріс емес белгілері (доғалардың құны) бар, ал бір төбесі бастапқы көз ретінде анықталған $G = (V, E)$ бағытталған граф бар болсын. Мәселе бастапқы көзден G графтың басқа барлық төбелерге дейінгі ең қысқа жолдың құнын табуында болып табылады (мұнда жолдың ұзындығы жолды құрайтын доғалар құндарының қосындысы ретінде анықталады). Бұл мәселе бір қайнар көзі бар ең қысқа жолды табу мәселесі деп жиі аталады. Біз жолдың ұзындығы туралы тіпті ол басқа, сызықтық емес, өлшем бірліктерінде, мысалы уақыттық бірліктерінде өлшенген кезде де айтатынымызды ескереміз.

G бағытталған графты бір ұйымның бір бөлімшесінен екіншісіне дейінгі жету маршрутының бағытының картасы ретінде алуға болады, мұндағы әрбір төбе бөлімшеге сәйкес, ал $v \rightarrow w$ доғасы – v бөлімшесінен w бөлімшесіне дейінгі маршрут бағытына. $v \rightarrow w$ доғасының белгісі – бұл v бөлімшесінен w^2 бөлімшесіне дейінгі жүру уақыты. Бұл жағдайда бағытталған граф үшін бір бастапқы орыннан ең қысқа жолды табу мәселесі әртүрлі бөлімшелер арасындағы минималды жүргізу уақыты ретінде түсіндіріледі.

Қойылған мәселені шешу үшін жиі Дейкстра (Dijkstra) алгоритмі деп атайтын «ашкөз» (жадный) алгоритмін пайдаланамыз. Алгоритм бастапқы орыннан ең қысқа жолдары белгілі көптеген S төбелер жиынтығын құрайды. Әр қадамда S жиынтығына басқа қалған төбелерге қарағанда қайнар көзден қашықтығы аз қалған төбелерінің бірі қосылады. Егер барлық доғалардың құны кері емес болса, онда қайнар көзден нақты төбеге

дейінгі ең қысқа жол тек S жиынтығынан ғана өтетініне сенімді болуға болады. Мұндай жолды ерекше деп атайық. Алгоритмнің әр қадамында солай да әрбір төбе үшін ерекше ең қысқа жолдың ұзындықтары жазылатын D массиві қолданылады. S жиынтығының құрамында бағытталған графтың барлық төбелері болған кезде, яғни барлық төбелер үшін «ерекше» жолдар табылғанда, онда D массивінің құрамында қайнар көзден әрбір төбеге дейінгі қысқа жолдың ұзындықтары болады.

Төменде Дейкстра алгоритмін жүзеге асыратын бағдарламаның листингі жазылған. Мұнда G бағытталған графтағы төбелер бүтін сандармен аталған деп саналады, яғни төбе 1 қайнар көз болып табылатын $V = \{1, 2, \dots, n\}$ төбелер жиынтығы. C массиві – бұл құндардың екіөлшемді массиві, мұнда $C[i, j]$ элементі $i \rightarrow j$ доғаның құнына тең. Егер $i \rightarrow j$ доғасы болмаса, онда $C[i, j] = \infty$ -ке тең деп қабылданады, яғни доғалардың кез-келген нақты құнынан үлкен. Қайнар көзден белгілі бір төбеге дейінгі ең қысқа жолды табу табиғи мәселе болып көрінуі мүмкін. Бірақ бұл мәселе жалпы жағдайда графтың барлық төбелері үшін ең қысқа жолды табу сияқты күрделілік деңгейіне ие (тағайындау төбесіне дейінгі жол графтың барлық төбелеріне дейінгі жолдар қаралғанынан ертерек табылғандағы сол «бақытты» оқиғадан басқа).

Бұл жағдайда үлгі ретінде бағытталған емес граф жақсырақ келеді деп санауға болады, өйткені $v \rightarrow w$ және $w \rightarrow v$ доғалар белгілерінің сәйкес келуі мүмкін. Бірақ шын мәнінде, көп жағдайда объект арасындағы қарама-қарсы бағыттағы жүру уақыты әртүрлі болып табылады. Сонымен қатар, $v \rightarrow w$ және $w \rightarrow v$ доғалар белгілерінің сәйкес келу болжамы ең қысқа жолды табу мәселесін шешуіне әсер етпейді (және көмектеспейді). Әр қадамда $D[i]$ i төбесіне дейінгі ағымдағы ең қысқа ерекше жолдың ұзындығын қамтиды.

procedure Dijkstra; begin

(1) $S := \{1\}$;

(2) for $i := 2$ to n do

(3) $D[i] := C[1, i]$; { D инициалдау }

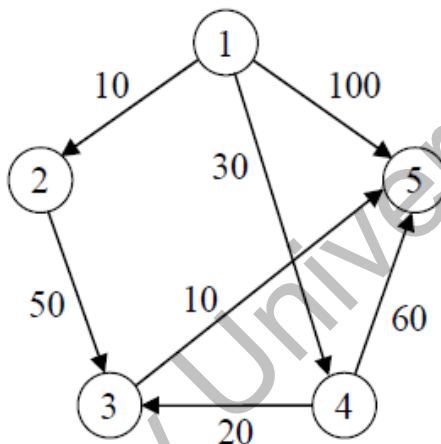
(4) for $i := 1$ to $n - 1$ do begin

(5) $D[w]$ мәні минималды болатын $V \setminus S$ жиынтығынан

төбесін таңдау

- (6) S жиынтығына w қосу;
 (7) *for* $V \setminus S$ жиынтығынан әрбір v төбесі *do*
 (8) $D[v] := \min(D[v], D[w] + C[w, v])$ *end*
end;

1-суретте көрсетілген бағытталған граф үшін Дейкстра алгоритмін қолданамыз.



1 сурет. Белгіленген доғалары бар бағытталған граф

Басында $S = \{1\}$, $D[2] = 10$, $D[3] = \infty$, $D[4] = 30$ және $D[5] = 100$. Циклдың бірінші қадамында (листингтің (4) – (8) жолдары) $w = 2$ болады, яғни төбе 2 D массивіндегі ең кіші мәнге ие. Кейін $D[3] = \min(\infty, 10 + 50) = 60$ есептейміз. $D[4]$ және $D[5]$ өзгермейді, өйткені төбе 2-ден шығатын және 4 пен 5 төбелеріне апаратын доғалар жоқ. Циклдың әрбір итерациясыдан кейінгі D массивінің элементтер мәндерінің тізбегі 1- кестеде көрсетілген.

Кез-келген төбе үшін ең қысқа жолының өзін (яғни төбелердің тізбегін) анықтайтындай алгоритмге өзгерістер енгізу қиын емес. Ол үшін тағы бір P төбелер массивін енгізу керек, мұнда $P[v]$ құрамында ең қысқа жолда v төбесінің алдында болған төбе бар. Басында $P[v] = 1$ барлығы үшін $v \neq 1$. Жоғарыда келтірілген листингте (8) жолынан кейін $D[w] + C[w, v] < D[v]$ шартымен

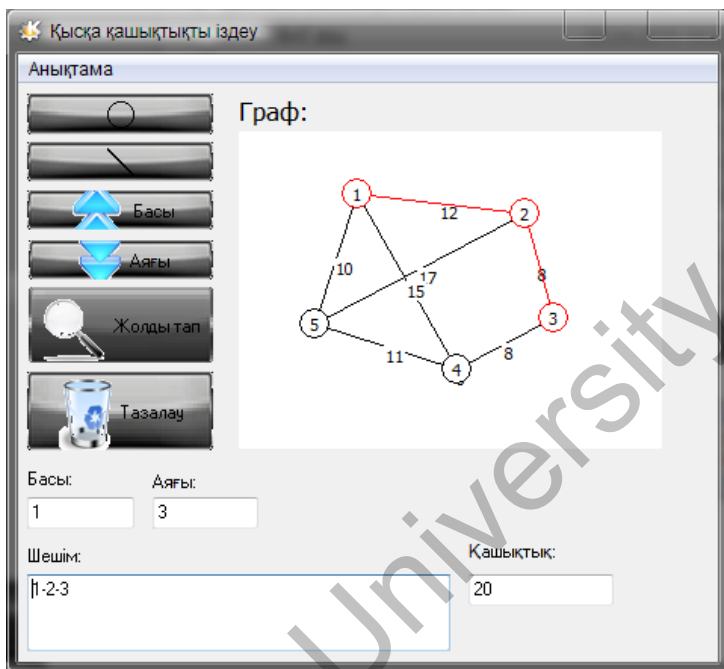
орындағанда $P[v]$ -ге w мәні меншіктелетін шартты операторын жазу керек. Алгоритмнің орындалуынан кейін әрбір төбеге дейінгі ең қысқа жолды P массивінің алдыңғы төбелерімен кері өту арқылы табуға болады.

Кесте 1. Бағытталған граф үшін Дейкстра алгоритмі бойынша есептеу

Итерация	S	w	$D[2]$	$D[3]$	$D[4]$	$D[5]$
Басы	{1}	–	10	∞	30	100
1	{1, 2}	2	10	60	30	100
2	{1, 2, 4}	4	10	50	30	90
3	{1, 2, 4, 3}	3	10	50	30	60
4	{1, 2, 4, 3, 5}	5	10	50	30	60

1 суретте көрсетілген бағытталған графтың мысалында ең қысқа жолды анықтайық. P массиві келесі мәндерге ие: $P[2] = 1$, $P[3] = 4$, $P[4] = 1$, $P[5] = 3$. Ең қысқа жолды анықтау үшін, мысалы, төбе 1-ден төбе 5-ке дейін, төбе 5-тен бастап алдыңғы төбелерді кері ретімен ізіне түсу керек. P массивінің мәндерінің негізінде төбе 5-тің алдында төбе 3, төбе 3-тің – төбе 4, ал оған, өз кезегінде, – төбе 1 болғанын анықтаймыз. Осылайша, төбе бірден төбе 5-ке дейінгі ең қысқа жолды төбелердің келесі тізбегі құрайды: 1, 4, 3, 5.

Коомуникациялық желідегі ең қысқа жолды анықтаудың Дейкстра және Флойд алгоритмдері арқылы құрылған программалық камтаманың бастақы беті 2-суретте көрсетілген.



2 сурет. Бағдарламаның бастапқы беті

Бұл программа келесі әрекеттерді орындайды бөліктен тұрады:

- Графтарты төбелері мен доғаларын тұрғызу батырмалары;
- Бастапқы төбе мен ақығы төбені таңдау батырмалары;
- Жолды іздеу батырмалары.

Терезеде көрініп тұрғандай батырмалар арқылы графтың бастапқы және соңғы төбесі анықталғаннан кейін шешім шығарылады және табылған арақашықтық көрсетіледі.

Жолды тап батырмасын басқан кезде келесі сурет 2-дегі терезе ашылады.



29 сурет. Орындалған амалдар саны

3 сурет терезесінен ең қысқа жолды табудың қолданылған барлық алгоритмдерін, сонымен қатар, әрбір алгоритм бойынша салыстыру санын көруге болады. Іздеу алгоритмі бойынша шамамен орындалған амалдар санының салыстырмалы диаграммасын аламыз. Дипломдық жұмыс барысында ең қысқа жолды анықтаудың математикалық моделі қарастырылып, граф бойынша қысқа жолды іздеу алгоритмдері қарастыратын программалық қамтама құрылды. Бұл бағдарлама кез келген кәсіпорын арасында корпоративтік желі құруда, тасымалдау есептеріндегі ең қысқа маршрутты анықтауда тиімді шешім қабылдауда таптырмайтын өнім болып табылады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

- 1 Макконел, Дж. Основы современных алгоритмов / Дж. Макконел. М.: Техносфера, 2004. 368с.
- 2 Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. СПб.: Питер, 2000. 304с.
- 3 Омаров А.М., Муратхан Р. Операцияларды зерттеу пәнінің практикумы. II бөлім. Дискреттік программалау және ойындар теориясы. - Караганда: Изд-во «САНАТ-Полиграфия», 2007.-149 с.

Жақсылық Е.

2 курс студенті, академик Е.А. Бөкетов атындағы

Қарағанды университеті

Сланбекова А.Е.

аға оқытушы, академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды

университеті