

Б.С.Нуримов

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Мақалада сингулярлы нүктелі сызықты емес Бельтрами теңдеуінің бір класы үшін Риман-Гильберт есебінің шешілу сұрақтары қарастырылған.

In work studied the solvability of the problem Riemann-Hilbert for one class of the Beltrami equation with singular points.

Пусть $G = \{z: |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$.

Рассмотрим в G уравнение

$$\partial_z^\beta V + f(z, V) = F(z), \quad (1)$$

где $F(z) \in S_\gamma(G, 0)$, $0 < \gamma < 1$.

Пусть $S_\nu(G, 0)$ — класс функций $f(z)$, для которых $|z|^\nu \cdot f(z) \in S(G)$, $S(G)$ — класс измеримых и существенно ограниченных в G функций с нормой

$$\|f\|_{S(G)} = \sup_{z \in G} \operatorname{vrai} |f(z)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f(z)\|_{L_p(G)}.$$

Норму в $S_\nu(G, 0)$ определим по формуле

$$\|f\|_{S_\nu(G, 0)} = \left\| |z|^\nu \cdot f(z) \right\|_{S(G)},$$

где $\nu > 0$ — действительное число.

В настоящей работе используем также следующие пространства:

$C_\nu(\bar{G}, 0)$ — класс функций $f(z)$, для которых $|z|^\nu \cdot f(z) \in C(\bar{G})$. Норму в $C_\nu(\bar{G}, 0)$ определим по формуле

$$\|f\|_{C_\nu(\bar{G}, 0)} = \left\| |z|^\nu \cdot f(z) \right\|_{C(\bar{G})}.$$

$U_0(G)$ — класс голоморфных в G функций; $W_p^1(G)$, $p \geq 1$ — пространство Соболева [1]; $W_{q,\beta}^1(G)$ — класс функций $f(z)$, для которых

$$\partial_z^\beta f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \beta \frac{z}{\bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z} \in L_q(G), \quad 0 < \beta < 1, \quad q > 2,$$

$W_q^1(G, \nu)$ — класс функций $f(z)$, представимых в G в виде $f(z) = (|z|^\theta)^\nu \cdot f_0(z)$, где $f_0(z) \in W_q^1(G)$, $\theta = \frac{2\beta}{1-\beta}$, $0 < \beta < 1$, ν — действительное число.

Относительно функции $f(z, V)$ предполагаем, что $f(z, 0) \in S_\gamma(G, 0)$ и она, как функция от z , для любых $V(z) \in C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ принадлежит классу $S_1(G, 0)$, а также для любых $V_1, V_2 \in C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ удовлетворяет условию

$$\left\| \frac{f(z, V_1) - f(z, V_2)}{V_1 - V_2} \right\|_{S_1(G, 0)} \leq c, \quad (2)$$

где $c > 0$ — заданное действительное число.

В таком случае, в частности, можно считать

$$f(z, 0) = 0. \quad (3)$$

Решения уравнения (1) ищем в классе:

$$C_{\gamma-1}(G) \cap W_{q,\beta}^1(G), \quad 2 < q < \frac{2}{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (4)$$

1⁰. Пусть G' — образ области G при отображении $z' = z|z|^\theta$. С помощью формул $\partial_z^\beta (T_G^\beta f)(z) = 0$, $\partial_z^\beta \Phi(z|z|^\theta) = 0$ [2–5] уравнение (1) приводим к виду

$$V(z) + (P_G^\beta V)(z) = (T_G^\beta F)(z) + \Phi(z|z|^\theta), \quad z \in G, \quad (5)$$

где

$$(T_G^\beta g)(z) = -\frac{1}{(1-\beta)\pi} \iint_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z \left| \frac{z}{\zeta} \right|^\theta} dG_\zeta, \quad \theta = \frac{2\beta}{1-\beta}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \Phi(z') \in U_0(G'), \quad (P_G^\beta V)(z) = (T_G^\beta f(z, V))(z).$$

Так как функция $V(z)$ принадлежит классу (4), то $V(0) = 0$. Поэтому из (5) получим

$$(P_G^\beta V)(0) = (T_G^\beta F)(0) + \Phi(0). \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует

$$V(z) + (P_{G,0}^\beta V)(z) = (T_{G,0}^\beta F)(z) + z|z|^\theta \Phi(z|z|^\theta), \quad z \in G, \quad (7)$$

где

$$(P_{G,0}^\beta V)(z) = (P_G^\beta V)(z) - (P_G^\beta V)(0), \quad (T_{G,0}^\beta g)(z) = (T_G^\beta g)(z) - (T_G^\beta g)(0).$$

Таким образом, любое решение уравнения (1) из класса (4) удовлетворяет уравнению (7). Решение уравнения (7) ищем в классе $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$, $0 < \gamma < 1$. Покажем, что любое решение уравнения (7) из класса $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ почти всюду в G удовлетворяет уравнению (1). В дальнейшем через M обозначим положительные постоянные, не зависящие от рядом стоящего множителя.

Пусть $\theta_1 = \begin{cases} \theta, & \text{если } 0 < \theta < 1, \\ \theta - [\theta], & \text{если } \theta > 1, \end{cases}$ $[a]$ — целая часть a .

Лемма 1. Оператор $(T_{G,0}^\beta g)(z)$ переводит пространство $S_\gamma(G, 0)$, $0 < \gamma < 1$ в пространство $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0) \cap C^\alpha(\bar{G})$, $\alpha = \theta_1 \frac{q-2}{q}$, $2 < q < \frac{2}{\gamma}$, и при этом справедливы оценки

$$\|(T_{G,0}^\beta g)(z)\|_{C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)} \leq M_\gamma \|g\|_{S_\gamma(G, 0)}, \quad (8)$$

$$\|(T_{G,0}^\beta g)(z)\|_{C^\alpha(\bar{G})} \leq M \|g\|_{L_q(G)}, \quad (9)$$

где

$$M_\gamma = \sup_{z \in G} \frac{|z|^{\theta+\gamma}}{(1-\beta)\pi} \iint_G \frac{dG_\zeta}{|\zeta|^{1+\gamma} |\zeta|^\theta - z|z|^\theta}.$$

Доказательство. Ограниченность числа M_γ доказывается неравенством Адамара [1]. С помощью этого неравенства также получим

$$|(T_{G,0}^\beta g)(z)| \leq M_\gamma \|g\|_{S_\gamma(G, 0)} |z|^{1-\gamma}. \quad (10)$$

Отсюда следует оценка (8). По определению

$$\|(T_{G,0}^\beta g)(z)\|_{C^\alpha(\bar{G})} \equiv \|(T_{G,0}^\beta g)(z)\|_{C(\bar{G})} + H((T_{G,0}^\beta g)(z), G, \alpha). \quad (11)$$

Здесь $H(g(z), G, \alpha) = \sup_{z_1, z_2 \in G} \frac{|g(z_1) - g(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}$.

Используя неравенство Гельдера, имеем:

$$\|(T_{G,0}^\beta g)(z)\|_{C(\bar{G})} \leq M \|g\|_{L_q(G)}. \quad (12)$$

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$, $q > 2$, $s > 2$, $1 < p < 2$, $\frac{1+\beta}{p} + \frac{1-\beta}{q} < 1$. С помощью неравенства Гельдера получим

$$\begin{aligned}
|(T_{G,0}^\beta g)(z_1) - (T_{G,0}^\beta g)(z_2)| &\leq \frac{|z_1|z_1|^\theta - z_2|z_2|^\theta|}{(1-\beta)\pi} \iint_G \frac{|\zeta|^\theta |g(\zeta)|}{|\zeta|\zeta|^\theta - z_1|z_1|^\theta| \cdot |\zeta|\zeta|^\theta - z_2|z_2|^\theta|} dG_\zeta \leq \\
&\leq \frac{|z_1|z_1|^\theta - z_2|z_2|^\theta|}{(1-\beta)\pi} \|g\|_{L_q(G)} \left(\iint_G \frac{dG_\zeta}{|\zeta|^{\frac{2-p}{p}\theta s}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\iint_G \frac{|\zeta|^{2\theta}}{|\zeta|\zeta|^\theta - z_1|z_1|^\theta|^p \cdot |\zeta|\zeta|^\theta - z_2|z_2|^\theta|^p} dG_\zeta \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Так как $\frac{2-p}{p}\theta s < 2$, то $\iint_G \frac{dG_\zeta}{|\zeta|^{\frac{2-p}{p}\theta s}} < M$. Во втором интеграле правой части последнего неравенства сделаем замену переменных $\zeta' = \zeta|\zeta|^\theta$. После этого используем неравенство Адамара. Тогда в силу неравенства $|z_1|z_1|^\theta - z_2|z_2|^\theta| \leq M|z_1 - z_2|^\alpha$ из (13) следует

$$H((T_{G,0}^\beta g)(z), G, \alpha) \leq M \|g\|_{L_q(G)}. \quad (14)$$

Из (12) и (14) в силу (11) следует оценка (9). Лемма доказана.

Лемма 2. Оператор $(P_{G,0}^\beta V)(z)$ переводит пространство $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ в пространство $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0) \cap C^\alpha(\bar{G})$, $\alpha = \theta_1 \frac{q-2}{q}$, $2 < q < \frac{2}{\gamma}$ и при этом справедливы оценки

$$\|(P_{G,0}^\beta V)(z)\|_{C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)} \leq cM_\gamma \|V\|_{C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)}, \quad (15)$$

$$\|(P_{G,0}^\beta V)(z)\|_{C^\alpha(\bar{G})} \leq cM \|V\|_{C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)}, \quad (16)$$

$$\|(P_{G,0}^\beta V_1)(z) - (P_{G,0}^\beta V_2)(z)\|_{C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)} \leq cM_\gamma \|V_1 - V_2\|_{C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)}, \quad (17)$$

где V_1, V_2 — любые функции из класса $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$.

Доказательство. В справедливости оценки (15) можно убедиться непосредственной проверкой с помощью неравенства Адамара. Оценка (17) доказывается аналогично.

Из (2) и (3) следует $\mu = \left\| \frac{f(z, V)}{V} \right\|_{S_1(G, 0)} \leq c$. Поэтому $\|f(z, V)\|_{L_q(G)} \leq Mc \|V\|_{C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)}$.

Следовательно, в силу формулы (6.8) работы [1; 56] имеет место оценка (16). Лемма доказана.

Из вида уравнения (7) и лемм 1 и 2 в силу результатов работ [2–5] вытекает, что любое решение этого уравнения из класса (4) удовлетворяет почти всюду в G уравнению (1). Таким образом, справедлива

Теорема 1. Любое решение уравнения (1) из класса (4) удовлетворяет уравнению (7). И обратно, если $\Phi(z') \in U_0(G')$, то любое решение из класса $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ уравнения (7) принадлежит классу (4) и удовлетворяет почти всюду в G уравнению (1).

Из леммы 2 следует, что оператор $P_{G,0}^\beta$ вполне непрерывен в классе $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ и переводит этот класс в $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0) \cap C^\alpha(\bar{G})$. Поэтому для доказательства разрешимости уравнения (7) в классе $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$V(z) + (P_{G,0}^\beta V)(z) = 0, \quad z \in G \quad (18)$$

имеет только тривиальное решение в $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$. Для этой цели докажем основную лемму для однородного уравнения

$$\partial_z^\beta V + f(z, V) = 0. \quad (19)$$

Лемма 3. Любое решение уравнения (19) из класса (4) представимо в виде

$$V(z) = \Phi(z|z|^\theta) \cdot \exp(-\omega(z)), \quad (20)$$

где

$$\Phi(z') \in U_0(G'), \quad \Phi(z|z|^\theta) \in S_\nu(G, 0), \quad \nu = \gamma - 1 + 8\mu \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2}, \quad \omega(z) = (T_G^\beta g)(z),$$

$$g(z) = \frac{f(z, V)}{V}, \quad \mu = \left\| \frac{f(z, V)}{V} \right\|_{S_1(G, 0)}.$$

Доказательство. В силу неравенства Адамара имеем

$$|\omega(z)| \leq M(G) + 8\mu \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2} \ln|z|,$$

где $M(G) > 0$ — постоянное, зависящее от G .

Отсюда следует

$$M|z|^{8\mu \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2}} \leq |\exp(-\omega(z))| \leq M|z|^{-8\mu \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2}}.$$

Следовательно, $\exp(-\omega(z)) \in S_j(G, 0)$, $j = 8\mu \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2}$. Поэтому для справедливости представления

(20) мы должны взять произвольную функцию $\Phi(z)$ из класса $S_\nu(G, 0)$, $\nu = \gamma - 1 + j < 0$. Покажем, теперь, что функция $\Phi(z|z|^\theta) = V(z) \cdot \exp \omega(z)$ голоморфна в G . Имеем [2–5]:

$$\partial_z^\beta \Phi = \partial_z^\beta (V(z) \cdot \exp \omega(z)) = \exp \omega(z) (\partial_z^\beta V + V \partial_z^\beta \omega) = \exp \omega(z) (\partial_z^\beta V + f(z, V)) = 0$$

и в силу теоремы 1.15 [1] $\Phi(z') \in U_0(G')$. Лемма доказана.

Докажем, что если $\mu < \frac{(1-\gamma)(1-\beta)^2}{8(1+\beta)}$, то однородное уравнение (18) имеет только тривиальное

решение в классе (4). Доказательство проводим от противного. Пусть уравнение (18) имеет нетривиальное решение $V(z)$ из класса (4). Тогда из вида (18) следует, что $V(z) \in C(E) \cap U_0(E - G')$ и $V(0) = 0$. С другой стороны, $V(z)$, как решение уравнения (19), представимо в виде (20), где $\Phi(z') \in U_0(G')$. Так как $\omega(z) \in U_0(E - G')$, то из (20) вытекает, что $\Phi(z') \in U_0(E)$. С другой стороны, $\Phi(z|z|^\theta) \in S_\nu(G, 0)$, где $\nu = \gamma - 1 + j < 0$. Поэтому $\Phi(0) = 0$. Это означает, что $\Phi(z') \equiv 0$ и, следовательно, $V(z) \equiv 0$. Таким образом, доказана

Теорема 2. При $\mu < \frac{(1-\gamma)(1-\beta)^2}{8(1+\beta)}$ уравнение (7) разрешимо в классе $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ для любой правой

части из этого же класса.

2°. Рассмотрим в G обобщенную задачу Римана-Гильберта для уравнения (1) в каноническом виде. К такому виду с помощью конформного отображения приводятся более общие случаи [1].

Задача (R-G): Требуется найти решение уравнения (1) из класса (4), удовлетворяющее граничному условию

$$\operatorname{Re}[t^{-m}V(t)] = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (21)$$

где m — целое число, $g(t) \in C^\alpha(\Gamma)$, $\alpha = 1 - \frac{2}{q}$, $2 < q < \frac{2}{\gamma}$.

а) Пусть $m \geq 1$. Для решения задачи используем уравнение (7).

Следуя [1, гл. 4, §7], в уравнении (7) функцию $\Phi(z|z|^\theta)$ представим в виде:

$$\Phi(z|z|^\theta) = \Phi_0(z|z|^\theta) - (P_{G,m}^\beta V)(z) + (T_{G,m}^\beta V)(z), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z') &\in U_0(G') \cap C^\alpha(\bar{G}'), \quad (P_{G,m}^\beta V)(z) = (T_{G,m}^\beta V^\wedge)(z), \quad V^\wedge = f(z, V), \\ (T_{G,m}^{\beta*} f)(z) &= -\frac{(z|z|^\theta)^{2m}}{\pi(1-\beta)} \iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}|z|^\theta|z|^\theta} dG_\zeta - \frac{(z|z|^\theta)^{2m-1}}{\pi(1-\beta)} \iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}|z|^\theta} dG_\zeta. \end{aligned}$$

После этого, подставив представление (22) для $V(z)$ в граничное условие (21), имеем:

$$\operatorname{Re}[t^{-m+1}\Phi_0(t)] = g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Общее решение этой задачи дается формулой [1; 295]

$$\Phi_0(z) = (D_{m-1}g)(z) + \Phi_{0m}(z), \quad (23)$$

где

$$(D_m g)(z) = \frac{z^m}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}, \quad \Phi_{0m}(z) = \sum_{k=0}^{m-2} (\alpha_k (z^k - z^{2m-k-2}) - i\beta (z^k - z^{2m-k-2})) + i\beta_n z^{m-1},$$

если $n \geq 2$ и $\Phi_{0m}(z) = i\beta_m$, если $m = 1$.

Здесь α_k, β_k , ($k = \overline{0, m-2}$) и β_m — произвольные действительные числа.

Из формул (7), (22) и (23) следует

$$V(z) + (P_{G,m}^{\beta^{\wedge}} V)(z) = (D_m g)(z|z|^0) + (T_{G,m}^{\beta^{\wedge}} F)(z) + z|z|^0 \Phi_{0m}(z|z|^0), \quad z \in G, \quad (24)$$

где

$$(P_{G,m}^{\beta^{\wedge}} V)(z) = (P_{G,0}^{\beta} V)(z) + z|z|^0 (P_{G,m}^{\beta} V)(z), \quad (T_{G,m}^{\beta^{\wedge}} F)(z) = (T_{G,0}^{\beta} F)(z) + z|z|^0 (T_{G,m}^{\beta} F)(z).$$

Таким образом, при $m \geq 1$ задача R-G приводится к эквивалентному уравнению (24). Каковы бы ни были постоянные α_k и β_k , решение уравнения (24) будет решением задачи R-G. Докажем, что уравнение (24) имеет решение из класса $C_{\gamma-1}(\overline{G}, 0)$. Как и в случае $(P_{G,0}^{\beta} V)(z)$, доказывается, что оператор $(P_{G,m}^{\beta^{\wedge}} V)(z)$ вполне непрерывен в $C_{\gamma-1}(\overline{G}, 0)$. Поэтому наше утверждение будет доказано, если покажем, что однородное уравнение

$$V(z) + (P_{G,m}^{\beta^{\wedge}} V)(z) = 0, \quad z \in G \quad (25)$$

не имеет нетривиального решения в классе $C_{\gamma-1}(\overline{G}, 0)$. Из (25) в силу интегральной формулы Коши [6], получим

$$(K_{\Gamma} V)(z) - (P_G^{\beta} V)(0) = -z(P_{G,m}^{\beta^*} V)(z), \quad z \in G,$$

где

$$(K_{\Gamma} f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Если разложим в ряд левую и правую части последнего равенства по степеням z , $|z| < 1$, то получим

$$\int_{\Gamma} V(t) e^{-ik\theta} d\theta = 0, \quad (k = \overline{1, 2m-1}), \quad t = e^{i\theta}. \quad (26)$$

Кроме того, любое решение уравнения (25) можно представить в виде

$$V(z) = \Phi(z|z|^0) \cdot \exp \Omega(z), \quad (27)$$

где

$$\Phi(z) \in U_0(G) \cap C^{\alpha}(\overline{G}), \quad \Phi(0) = 0, \\ \Omega(z) = -\frac{1}{\pi(1-\beta)} \iint_G \left(\frac{V^*(\zeta)}{\zeta|\zeta|^0 - z|z|^0} - \frac{z|z|^0 \overline{V^*(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}|\zeta|^0 z|z|^0} \right) dG_{\zeta}, \quad V^*(\zeta) = \frac{V^{\wedge}(\zeta)}{V(\zeta)}.$$

Но, $V(z)$ удовлетворяет также однородному краевому условию

$$\operatorname{Re}[t^{-m}V(t)] = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (28)$$

Так как $\operatorname{Re}[i\Omega(t)] = 0$, $t \in \Gamma$, то краевое условие (28) в силу (27) принимает вид $\operatorname{Re}[t^{-m}\Phi(t)] = 0$.

Общее решение этой задачи в силу $\Phi(0) = 0$ имеет вид $\Phi(z) = \sum_{k=1}^{2m-1} c_k z^k$, где $(k = \overline{1, 2m-1})$ — комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям $c_{2m-k} = -\overline{c_k}$, ($k = \overline{1, m}$). Поэтому в силу (27) решение уравнения (25) должно иметь вид

$$V(z) = \sum_{k=1}^{2m-1} c_k (z|z|^0)^k \exp \Omega(z).$$

Внося это в равенство (26), получим:

$$\sum_{k=1}^{2m-1} c_k (z|z|^\theta)^k \int_{\Gamma} t^k t^{-m} \exp \Omega(t) dt = 0, \quad (k = \overline{1, 2m-1}). \quad (29)$$

Отсюда следует, что $c_k = 0$, ($k = \overline{1, 2m-1}$), ибо детерминант системы (29) отличен от нуля как детерминант Грамма для системы линейно независимых функций $t^m \exp\left(\frac{\Omega(t)}{2}\right)$, ($k = \overline{1, 2m-1}$), $\Omega(t) = \Omega(\bar{t})$, $t \in \Gamma$. Это доказывает, что однородное уравнение (24) не имеет нетривиального решения. Следовательно, неоднородное уравнение (24) имеет решение из $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ для всякой правой части, принадлежащей тому же классу. Итак, имеет место

Теорема 3. При $m > 0$ задача R-G всегда разрешима. Многообразие решений этой задачи находится из уравнения (24).

б) Пусть $m = 0$. Следуя пункту а), в уравнении (7) функцию $z|z|^\theta \Phi(z|z|^\theta)$ представим в виде

$$z|z|^\theta \Phi(z|z|^\theta) = (D_0 g)(z|z|^\theta) + ic_0 - z|z|^\theta (P_{G,0}^{\beta*} V)(z) + z|z|^\theta (T_{G,0}^{\beta*} F)(z), \quad (30)$$

где c_0 — произвольное действительное число,

$$(P_{G,0}^{\beta*} V)(z) = (T_{G,0}^{\beta*} V^\wedge)(z), \quad (T_{G,0}^{\beta*} f)(z) = -\frac{1}{\pi(1-\beta)} \iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}|\zeta|^\theta z|z|^\theta} dG_\zeta - \frac{(z|z|^\theta)^{-1}}{\pi(1-\beta)} \iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}|\zeta|^\theta} dG_\zeta.$$

Функция $\Phi(z)$, заданная по формуле (30), принадлежит классу $U_0(G') \cap C^\alpha(\bar{G}')$, если выполняется равенство

$$\operatorname{Re}[(P_G^\beta V)(0) - (T_G^\beta F)(0)] = (D_0 g)(0) \quad (31)$$

и число c_0 выберем следующим образом:

$$c_0 = -\operatorname{Im}[(P_G^\beta V)(0) - (T_G^\beta F)(0)]. \quad (32)$$

Используя (30)–(32), из (7) получим:

$$V(z) + (P^\beta V)(z) = (D_0 g)(z) - (D_0 g)(0) + (T^\beta F)(z), \quad z \in G, \quad (33)$$

где

$$(P^\beta V)(z) = (P_{G,0}^{\beta*} V)(z) - \frac{z|z|^\theta}{\pi(1-\beta)} \iint_G \frac{\overline{V^\wedge(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}|\zeta|^\theta z|z|^\theta} dG_\zeta, \quad V^\wedge = f(z, V),$$

$$(T^\beta F)(z) = (T_{G,0}^{\beta*} F)(z) - \frac{z|z|^\theta}{\pi(1-\beta)} \iint_G \frac{\overline{F(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}|\zeta|^\theta z|z|^\theta} dG_\zeta.$$

Если выполняется равенство (31), то любое решение уравнения (33) из $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ удовлетворяет граничному условию (21) при $m = 1$.

Разрешимость уравнения (33) в классе $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ доказывается аналогично доказательству разрешимости уравнения (24). Следовательно, при выполнении условия (31) задача R-G разрешима. Итак, справедлива

Теорема 4. При $m = 0$ для разрешимости задачи R-G достаточно выполнения одного условия (31). При выполнении условия (31) решение задачи R-G находится из уравнения (33).

в) Пусть $m < 0$. Так как нам нужны решения задачи R-G из класса (4), в этом случае формула (24) не пригодна. Поэтому введем в рассмотрение функцию $W(z) = (z|z|^\theta)^{k+1} V(z)$, где $k = -m$. Функция $W(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_z^\beta W + f_{-k-1}(z, W) = F_{-k-1}(z),$$

где

$$f_{-k-1}(z, W) = (z|z|^\theta)^{k+1} f(z, z^{-k-1}W), \quad F_{-k-1}(z) = (z|z|^\theta)^{k+1} F(z)$$

и краевому условию

$$\operatorname{Re}[t^{-1}W(t)] = g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Очевидно, что функция $F_{-k-1}(z) \in S_\gamma(G, 0)$, а $f_{-k-1}(z, W)$ удовлетворяет условиям (2) и (3). Поэтому эта задача соответствует рассмотренной в пункте а) задаче при $m = 1$. Следовательно, функция $W(z)$ находится из уравнения (см. формулу (24)).

$$W(z) + (P_{G,1}^{\beta \wedge} \hat{W}_{-k-1})(z) = (D_1 g)(z|z|^\theta) + (T_{G,1}^{\beta \wedge} F_{-k-1})(z) + ic_0 z|z|^\theta \quad z \in G,$$

где c_0 — произвольное действительное число, $\hat{W}_{-k-1}(z) = f_{-k-1}(z, W)$.

Таким образом, решение задачи R-G при $m < 0$ находится из уравнения

$$\begin{aligned} V(z) + T_{G,0}^\beta ((z|z|^\theta)^{k+1} V^\wedge(z))(z) - \frac{z|z|^\theta}{(1-\beta)\pi} \iint_G \frac{(\bar{\zeta}|\zeta|^\theta)^{2k} \overline{V^\wedge(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}|\zeta|^\theta z|z|^\theta} dG_\zeta = \\ = \frac{z|z|^\theta}{i \cdot \pi} \int_\Gamma \frac{g(t) dt}{t^{k+1}(t-z|z|^\theta)} + (T_{G,0}^\beta (z|z|^\theta)^{k+1} F(z))(z) + \sum_{j=0}^k a_j (z|z|^\theta)^{-j}, \quad z \in G, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} a_j = \frac{1}{(1-\beta)\pi} \iint_G \frac{1}{\zeta} (\zeta|\zeta|^\theta)^{j-1} V^\wedge(\zeta) dG_\zeta + \frac{1}{(1-\beta)\pi} \iint_G (\bar{\zeta}|\zeta|^\theta)^{2k-j-1} \overline{V^\wedge(\zeta)} dG_\zeta + \frac{1}{i \cdot \pi} \int_\Gamma t^{j-k-1} g(t) dt, \quad (j = \overline{0, k-1}), \\ a_k = \frac{1}{(1-\beta)\pi} \iint_G (\zeta|\zeta|^\theta)^{k-1} V^\wedge(\zeta) dG_\zeta + \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t} dt + ic_0. \end{aligned}$$

Из (24) видно, что для непрерывности функции $V(z)$ внутри G достаточно выполнения равенств:

$$a_j = 0, \quad (j = \overline{0, k}). \quad (35)$$

Условие (35) содержит $2k+1$ вещественных равенств. Выполнение одного из них, а именно $\operatorname{Im} a_k = 0$, можно обеспечить посредством подходящего выбора постоянного c_0 . Следовательно, остается $2k+1$ условий. Таким образом, при $m < 0$ задача R-G приводится к уравнению

$$V(z) + (QV)(z) = \frac{z|z|^\theta}{i \cdot (1-\beta)\pi} \int_\Gamma \frac{g(t) dt}{t^{k+1}(t-z)} + (T_{G,0}^\beta F_{-k-1})(z), \quad z \in G, \quad (36)$$

где

$$(QV)(z) = T_{G,0}^\beta ((z|z|^\theta)^{k+1} V^\wedge(z))(z) - \frac{z|z|^\theta}{(1-\beta)\pi} \iint_G \frac{(\bar{\zeta}|\zeta|^\theta)^{2k} \overline{V^\wedge(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}|\zeta|^\theta z|z|^\theta} dG_\zeta.$$

Оператор $(QV)(z)$ вполне непрерывен в $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ и переводит это пространство в $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0) \cap C^\alpha(\bar{G})$.

Если в уравнении

$$V(z) + (QV)(z) = 0$$

сделаем замену $V(z) = z|z|^\theta W(z)$, то получим уравнение вида (7.33) из [1; 300], которое имеет только тривиальное решение. Поэтому уравнение (36) разрешимо в $C_{\gamma-1}(\bar{G}, 0)$ при любой правой части из того же класса.

Итак, справедлива

Теорема 5. При $m < 0$ для разрешимости задачи R-G достаточно выполнения $2|m|+1$ условий (35), а именно условий (35), за исключением условия $\operatorname{Im} a_k = 0$.

Список литературы

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с.
2. Тунгатаров А.Б. О применении некоторых интегральных операторов в теории обобщенных аналитических функции // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1987. — № 1. — С. 51–54.

3. Тунгатаров А.Б. О некоторых интегральных операторах в теории обобщенных аналитических функций // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 2. — С. 345–348.
4. Тунгатаров А.Б. Об одном классе эллиптических систем на плоскости с сингулярной точкой // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26. — № 10. — С. 1805–1816.
5. Тунгатаров А. О свойствах одного интегрального оператора в классах суммируемых функций // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1985. — № 5(126). — С. 58–62.
6. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

УДК 656.13.07:55

А.М.Омаров

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННЫХ ГРАФИКОВ

Мақалада үлестірімдік типті екі есеп қарастырылады. Бірінші есеп транспорттық құралдардың тиімді қолдануын есепке алумен байланысты болса, екіншісі көлік желілерді үлестіруге арналған. Бұл есептер түрлендірулердің көмегімен транспорттық есепке келтіріліп, белгілі әдістермен іске асады.

Two problems of the distributing type are considered in article. The first problem is connected with account of the return the transport facilities, but the other — with sharing the transport on line. These problems by means of transformations are reduced to transport problem, which are realized by known methods.

В процессе выработки плановых решений приходится формализовать зависимости между отдельными элементами экономической системы, применять математический аппарат, общие кибернетические закономерности и принципы, т.е. использовать экономико-математические методы.

Эффективное применение этих методов требует их серьезного и глубокого изучения, а значит, определенной систематики и классификации.

Любая классификация подчинена целям исследования или анализа того или иного явления.

В соответствии с целью исследования явления выбирается и классификационный признак. Поскольку целью изучения экономико-математических методов являются раскрытие механизма их реализации, определение области наиболее эффективного использования, то и в качестве классификационного признака можно принять, например, характер используемого математического аппарата. По этому признаку можно выделить методы классической и прикладной математики [1].

Решение распределительной задачи, и в еще большей степени общей задачи, линейного программирования требует большого объема данных и вычислений. Даже при нескольких переменных нужно время для заполнения и пересчета таблиц. Если же число переменных измеряется десятками или даже сотнями, то решение задач вручную становится нереальным. В этом случае расчеты ведут на современных персональных компьютерах, которые при быстроедействии в сотни тысяч операций в секунду позволяют быстро получить конечный результат.

При планировании перевозок товара возникает необходимость в определении кратчайших расстояний между автотранспортными предприятиями, пунктами производства и потребления. Кроме того, кратчайшие расстояния являются основой при оплате клиентами транспортных услуг. Они необходимы также для определения грузооборота автотранспортного предприятия, учета расхода топлива, расчета заработной платы водителей и т.п.

В практике перевозок встречаются такие распределительные задачи, когда нужно осуществлять поставки грузов в назначенное время. Такие задачи характерны для перевозок строительных и торговых грузов. Например, строительство часто ведется по монтажному графику. В графике для каждого дня указано, какие строительные изделия или детали, в какое время суток должны быть доставлены или смонтированы на строящемся объекте. Если строительство ведется без промежуточного склади-