ПРЕДЕЛЬНОЕ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НАГРУЖЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО СВОЙСТВО

[1,2]Джумабаев Д.С., [1,3]Темешева С.М.

[1]Институт математики и математического моделирования МОН РК,
[2]Международный университет информационных технологий,
[3]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: dzhumabaev@list.ru, nur15@mail.ru

На $R = (-\infty, \infty)$ рассматривается нелинейное нагруженное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + f_0\big(t, x(\theta_{-m}), x(\theta_{-m+1}), \dots, x(\theta_0), \dots, x(\theta_m)\big), \quad x \in R^n, \ \ ||x|| = \max|x_i|, \qquad (1)$$

где $f: R^{n+1} \to R^n$, $f_0: R^{2n+2} \to R^n$ непрерывны, $\theta_{-m} < \theta_{-m+1} < \ldots < \theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m$

Вопросы, связанные с существованием и построением приближенных методов нахождения решений уравнения (1), удовлетворяющих заданным условиям на бесконечности, рассмотрены многими авторами [1–5].

Применяются обозначения: $\tilde{C}(J, R^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных на $J \subseteq R$ функций $x: J \to R^n$, $||x||_1 = \sup_{t \in J} ||x(t)||$; $C(J, R^n)$ – множество непрерывных на J функций;

$$S(\tilde{x}, r) = \{x \in R^n: \|x - \tilde{x}\| < r\};$$

$$S(x_0(t), J, r) = \big\{x(t) \in C(J, R^n): x(t) - x_0(t) \in \tilde{C}(J, R^n), \|x - x_0\|_1 < r\big\},$$

где $x_0(t) \in C(J, R^n)$;

$$G(x_0(t), J, r) = \{(t, x): t \in J, \|x - x_0(t)\| < r\},$$

$$G_0(x_0(t), J, r) = \{(t, v_{-m}, \dots, v_m): \quad t \in J, \|v_k - x_0(t)\| < r, k = \overline{-m, m}\}.$$

При изучении поведения решений при $t \to \infty$ оказывается полезным использование свойств нагруженного дифференциального уравнения на бесконечности.

Определение. Непрерывно дифференцируемая на R_+ функция $x_0(t)$ называется предельным при $t \to \infty$ решением уравнения (1), если

$$\lim_{t \to +\infty} \big\|\dot{x}_0(t) - f\big(t, x_0(t)\big) - f_0\big(t, x_0(\theta_{-m}), x_0(\theta_{-m+1}), \dots, x_0(\theta_0), \dots, x_0(\theta_m)\big)\big\| = 0.$$

Это определение является обобщением определения [6, с. 15] для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

Следующая теорема устанавливает притягивающее свойство предельного при $t \to +\infty$ решения.

Теорема. 1) Пусть функция $f(t,x)$ имеет равномерно непрерывную производную по x в $G(x_0(t), R_+, r)$, где $x_0(t)$ - предельное при $t \to \infty$ решение уравнения (1), и линеаризованное уравнение $\frac{dy}{dt} = f'_x\big(t, x_0(t)\big)y, y \in R^n$, э.д. на R_+. 2) Для всех $(t, v_{-m}, \dots, v_m) \in G_0(x_0(t), R_+, r)$ имеет место предельное соотношение $lim_{t \to +\infty} \|f_0(t, v_{-m}, \dots, v_m)\| = 0$. 3) Для всех $(t, v_{-m}, \dots, v_m) \in$ $G0x0t,R+,r$ имеет место предельные соотношения $limt{\to}{+}\infty(f0t,v{-}m,\dots,vm)vk'=0, k={-}m,m.$ Тогда существуют числа $T_0 > 0$, $r_0 \in (0, r]$, при которых в $S(x_0(t), [T_0, \infty), r_0)$ уравнение (1) имеет хотя бы одно решение, и для любого $x(t)$ (решения уравнения (1), принадлежащего $S(x_0(t), [T, \infty), r_0)$, где $T \geq T_0$) имеет место предельное соотношение $\lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_0(t)\| = 0$.

Список использованных источников

1. *Далецкий Ю.А., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Конюхова Н.Б.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1970. - Т. 10, № 5. - С. 1150-1163.
3. *Конюхова Н.Б.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1974. - Т. 14, № 5. - С. 1221-1231.
4. *Мухамадиев Э.* // Матем. заметки. - 1981. - Т. 30, Вып. 3. - С. 433 - 460.
5. *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б., Балла К.* // Comput. Math. Banach Center Publ. Warsaw: PWN Polish Scient. Pubis. - 1984. - V. 13. - P. 319-351.
6. *Джумабаев Д.С.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.–1992. – Т. 32, №1. – С. 13-29.