МЕХАНИКА

УДК 621.01: 531.3

Ж.Б.Бакиров, М.Ж.Бакиров

Карагандинский государственный технический университет

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

Кездейсоқ функциялар теориясы негізінде кинематикалық әсерден бір бостандық дәрежелі сызықтық жүйелердің стационарлық емес кездейсоқ тербелістердің ықтималдық сипаттамалары анықталған. Стационарлық әсерден «ақ шуыл» түріндегі өтпелі және экспоненциалды-коррелирленген процестер қарастырылған.

On the basis of the theory of stochastic functions have found probability characteristics of non-stationary casual fluctuations of linear systems with one degree of freedom at kinematic excitation. Transient process are considered at stationary influences in the form of «white noise» and the exponentially correlated process.

Рассмотрим колебания, вызванные случайным движением основания, с которым упруго связана масса (см. рис.). Примем, что движение основания началось в момент времени $t_0 = 0$.

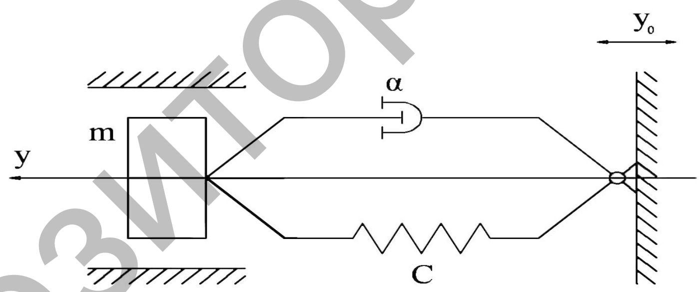

Рис. Динамическая модель системы

Уравнение движения массы имеет вид

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_0^2 y = 2\varepsilon\dot{y}_0 + \omega_0^2 y_0 . \tag{1}$$

где $\omega_0^2 = c / m$ — частота собственных колебаний; $2\varepsilon = \alpha / m$ — коэффициент затухания.

Решение этого уравнения при нулевых начальных условиях

$$y = \frac{1}{p}\int_0^t k(t-\tau)\left(2\varepsilon\dot{y}_0 + \omega_0^2 y_0\right)d\tau , \tag{2}$$

где $p = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$, $\kappa(t-\tau) = e^{-\varepsilon(t-\tau)}\sin p(t-\tau)$.

Смещение y_0 считаем случайной нестационарной функцией с известными вероятностными характеристиками m_{y_0} и K_{y_0}.

Вероятностные характеристики решения (2) равны:

$$m_y = \frac{1}{p}\int_0^t \left(\omega_0^2 m_{y_0} + 2\varepsilon m_{\dot{y}_0}\right)k(t-\tau)d\tau , \tag{3}$$

$$K_y = \frac{1}{p^2}\int_0^t\int_0^{t_1}\left[\omega_0^4 K_{y_0} + 2\varepsilon\omega_0^2\left(K_{\dot{y}_0 y_0} + K_{y_0\dot{y}_0}\right) + 4\varepsilon^2 K_{\dot{y}_0\dot{y}_0}\right]\times k\left(t-\tau\right)k\left(t_1-\tau_1\right)d\tau\, d\tau_1. \quad (4)$$

где $m_{\dot{y}_0} = dm_{y_0}/dt$, а корреляционные функции смещения и его производной определяются по формуле [1]

$$K_{x_p x_q} = \frac{\partial^{p+q}K(t,t')}{\partial t^p(\partial t')^q},$$

где p, q — порядки производных.

При действии стационарного кинематического возбуждения возможны как нестандартные колебания, если время процесса меньше времени $t_з$, необходимого для практического затухания переходных процессов, так и стационарные, если время процесса больше времени $t_з$.

Рассмотрим нестационарные колебания системы при действии стационарного возбуждения в виде «белого шума» $m_{y_0} = 0$, $K_{y_0(\tau)} = S_0\,\delta\left(\tau\right)$,

где S_0 — интенсивность процесса; $\delta\left(\tau\right)$ — дельта-функция Дирака.

Корреляционную функцию решения определяем по формуле (4):

$$K_y = \frac{S_0}{p^2}\left\{\omega_0^4\int_0^t k\left(t-\tau\right)k\left(t_1-\tau\right)d\tau + 2\varepsilon\omega_0^2\left[\int_0^t\int_0^{t_1}\frac{\partial\delta\left(\tau-\tau_1\right)}{\partial\tau}k\left(t-\tau\right)k\left(t_1-\tau_1\right)d\tau\, d\tau_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t\int_0^{t_1}\frac{\partial\delta\left(\tau-\tau_1\right)}{\partial\tau_1}k\left(t-\tau\right)k\left(t_1-\tau_1\right)\right] + 4\varepsilon^2\int_0^t\int_0^{t_1}\frac{\partial^2\delta\left(\tau-\tau_1\right)}{\partial\tau\,\partial\tau_1}k\left(t-\tau\right)k\left(t_1-\tau_1\right)d\tau\, d\tau_1\right\} =$$

$$= \frac{S_0}{p^2}\left[\omega_0^4 I_1 + 2\varepsilon\omega_0^2\left(I_2 + I_3\right) + 4\varepsilon^2 I_4\right]. \quad (5)$$

Вычислим интегралы I_i:

$$I_1 = \frac{p^2}{4\varepsilon\omega_0^2}\left\{e^{-\varepsilon\Delta t}\left(\cos p\Delta t + \frac{\varepsilon}{p}\sin p\Delta t\right) + \frac{1}{p^2}e^{-\varepsilon\left(t_1+t\right)}\left[\varepsilon^2\cos p\left(t_1+t\right) - p\varepsilon\sin p\left(t_1+t\right) - \omega_0^2\cos p\Delta t\right]\right\},$$

где $\Delta t = t_1 - t$.

Для вычисления остальных интегралов воспользуемся следующим свойством дельта-функции [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\delta}\left(t-t_0\right)\phi\left(t\right)dt = -\dot{\phi}\left(t_0\right).$$

Тогда

$$I_3 = \int_0^t k\left(t-\tau\right)d\tau\left[-\frac{\partial k\left(t_1-\tau_1\right)}{\partial\tau_1}\right]_{\tau_1=\tau} = \int_0^t k\left(t-\tau\right)e^{-\varepsilon\left(t_1-\tau\right)}\left[p\cos p\left(t_1-\tau\right) - \varepsilon\sin p\left(t_1-\tau\right)\right]d\tau =$$

$$= \frac{p}{4\varepsilon}\left\{e^{-\varepsilon\left(t-t_1\right)}\left[\sin p\Delta t + \frac{\varepsilon}{p}\cos p\Delta t - \frac{\varepsilon}{p}\cos p\left(t_1+t\right)\right] - e^{-\varepsilon\left|\Delta t\right|}\sin p\Delta t\right\}.$$

Для вычисления I_2 достаточно здесь поменять местами t и t_1. Тогда

$$I_2 + I_3 = 0{,}5\, e^{-\varepsilon\left(t+t_1\right)}\left[\cos p\Delta t - \cos p\left(t_1+t\right)\right].$$

Наконец, интеграл:

$$I_4 = \int_0^t k\left(t-\tau\right)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{t_1}\frac{\partial\delta\left(\tau-\tau_1\right)}{\partial\tau_1}k\left(t_1-\tau_1\right)d\tau_1\right]d\tau = \int_0^t k\left(t-\tau\right)\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{\partial k\left(t_1-\tau_1\right)}{\partial\tau_1}\right]_{\tau_1=\tau}\right\}d\tau =$$

$$= \int_0^t k\left(t-\tau\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{e^{-\varepsilon\left(t_1-\tau\right)}\left[p\cos p\left(t_1-\tau\right) - \varepsilon\sin p\left(t_1-\tau\right)\right]\right\}d\tau.$$

После дифференцирования, интегрирования и приведения подобных членов получим

$$I_4 = \frac{p}{4}\left\{e^{-\varepsilon\left(t_1+t\right)}\left[2\sin p\Delta t - \frac{\omega_0^2 - 2\varepsilon^2}{\varepsilon p}\cos p\Delta t - \sin p\left(t_1+t\right) - \frac{\varepsilon}{p}\cos p\left(t_1+t\right)\right] + e^{-\varepsilon\Delta t}\left(\frac{p}{\varepsilon}\cos p\Delta t - \sin p\Delta t\right)\right\}.$$

Подставляя далее эти интегралы в выражение (5) и распространяя результат на всю числовую ось, получаем:

$$K_y(\tau)=\frac{S_0}{4\varepsilon}e^{-\varepsilon|\tau|}\left[\left(\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)\cos p\tau+\frac{\varepsilon}{p}\left(\omega_0^2-4\varepsilon^2\right)\sin p|\tau|\right]-\frac{S_0}{4p}e^{-\varepsilon(t_1+t)}\left[\frac{\omega_0^4-8\varepsilon^4}{p\varepsilon}\cos p\tau-\right.$$

$$\left.-8\varepsilon^2\sin p|\tau|+\frac{\varepsilon}{p}\left(3\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)\cos p\left(t_1+t\right)+\left(\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)\sin p\left(t_1+t\right)\right]. \qquad (6)$$

Полагая здесь $t_1=t \quad (\tau=0)$, получаем выражение для дисперсии:

$$D_y=\frac{S_0}{4\varepsilon}\left\{\omega_0^2+4\varepsilon^2-p^{-2}e^{-2\varepsilon t}\left[\omega_0^4-8\varepsilon^4+\varepsilon^2\left(3\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)\cos 2pt+\frac{p}{\varepsilon}\left(\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)\sin 2pt\right]\right\}. \qquad (7)$$

По истечении определённого времени $(t\to\infty)$ процесс становится стационарным и его корреляционная функция определяется первым слагаемым с квадратной скобкой в (6), а дисперсия

$$D_y=\left(\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)S_0/4\varepsilon\,. \qquad (7')$$

Эти результаты легко получить из уравнения (1) спектральным методом:

$$S_y(\omega)=\frac{S_0}{2\pi}\cdot\frac{\omega_0^4+4\varepsilon^2\omega^2}{A_2(\omega)A_2(-\omega)}, \qquad (8)$$

где $A_2(\omega)=\omega^2-2i\omega\varepsilon-\omega_0^2$.

Корреляционная функция стационарного процесса определяется выражением [1]

$$K_y(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)e^{i\omega\varepsilon}d\omega\,.$$

Применяя теорему о вычетах, получаем

$$K_y(\tau)=\frac{S_0}{2\pi}2\pi i\sum_{k=1}^{2}\frac{\omega_0^4+4\varepsilon^2\omega_k^2}{A_2'(\omega_k)A_2(-\omega_k)}e^{i\omega_k\tau},$$

где ω_k — полинома $A_2(\omega)$:

$$\omega_1=p+i\varepsilon\,,\ \omega_2=-p+i\varepsilon\,,\ A_2'=2(\omega-i\varepsilon)\,.$$

После подстановки ω_k и алгебраических преобразований получаем

$$K_y(\tau)=\frac{S_0}{4\varepsilon}e^{-\varepsilon|\tau|}\left[\left(\omega_0^2+4\varepsilon^2\right)\cos p\tau+\frac{\varepsilon}{p}\left(\omega_0^2-4\varepsilon^2\right)\sin p|\tau|\right].$$

Рассмотрим теперь экспоненциально-коррелированное кинематическое воздействие

$$m_{y_0}=0\,,\ K_{y_0(\tau)}=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\,.$$

В этом случае корреляционные функции, входящие под знак интеграла, имеют вид $(u=\tau-\tau_1)$

$$K_{\dot y_0 y_0}=\frac{\partial K_{y_0}}{\partial\tau}=\sigma^2\frac{\partial e^{-\alpha|u|}}{\partial|u|}\cdot\frac{d|u|}{du}\cdot\frac{du}{d\tau}=-\sigma^2\alpha e^{-\alpha|u|}sign\,u\,;$$

$$K_{y_0\dot y_0}=\frac{\partial K_{y_0}}{\partial\tau_1}=\sigma^2\alpha e^{-\alpha|u|}sign\,u;\quad K_{\dot y_0\dot y_0}=\frac{\partial^2K_{y_0}}{\partial\tau\partial\tau_1}=\sigma^2\alpha e^{-\alpha|u|}\left[2\delta(u)-\alpha\right].$$

Здесь использованы следующие свойства обобщенных функций:

$$\frac{d|u|}{du}=sign\,u\,;\ \frac{d(sign\,u)}{du}=2\delta(u)\,.$$

После подстановки этих выражений в (4) получаем

$$K_y=\frac{\sigma^2}{p^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\left[\omega_0^4+8\alpha\varepsilon^2\delta(\tau-\tau_1)-4\varepsilon^2\alpha^2\right]k(t-\tau)k(t_1-\tau_1)e^{-\alpha|\tau-\tau_1|}d\tau d\tau_1\,,$$

$$D_{y(t)}=\frac{\sigma^2}{p^2}\left\{\left(\omega_0^4-4\varepsilon^2\alpha^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^t\kappa(t-\tau)\kappa(t-\tau_1)e^{-\alpha|\tau-\tau_1|}d\tau d\tau_1+8\varepsilon^2\alpha\int\limits_0^t k^2(t-\tau)d\tau\right\}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{p^2}\left[\left(\omega_0^4-4\varepsilon^2\alpha^2\right)\mathrm{I}_q+8\varepsilon^2\alpha\mathrm{I}_0\right].$$

Вычислим интеграл I_q. Внутренний интеграл представим в виде суммы двух интегралов, не содержащих модуля:

$$e^{\tau(\varepsilon-\alpha)}\int_0^{\tau}\sin\rho\left(t-\tau_1\right)e^{(\alpha+\varepsilon)\tau_1}d\tau_1+e^{(\alpha+\varepsilon)\tau}\int_{\tau}^{t}\sin\rho\left(t-\tau_1\right)e^{(\varepsilon-\alpha)\tau_1}d\tau_1 .$$

С учетом того, что

$$\mathrm{I}_1=\int_0^t e^{at}\sin\rho\left(t-\tau\right)d\tau=\frac{pe^{at}-a\sin\rho t-\rho\cos\rho t}{\rho^2+a^2},$$

$$\mathrm{I}_2=\int_0^t e^{2\varepsilon\tau}\sin\rho\left(t-\tau\right)\sin\rho\tau d\tau=\frac{p}{4\omega_0^2}\left[\sin\rho t+\frac{p}{\varepsilon}\cos\rho t+e^{2\varepsilon t}\left(\sin\rho t-\frac{p}{\varepsilon}\cos\rho t\right)\right],$$

$$\mathrm{I}_3=\int_0^t e^{2\varepsilon\tau}\sin\rho\left(t-\tau\right)\cos\rho\tau d\tau=\frac{p}{4\omega_0^2}\left[-\cos\rho t-\frac{p^2+2\varepsilon^2}{\varepsilon\rho}\sin\rho t+e^{2\varepsilon t}\left(\cos\rho t+\frac{p}{\varepsilon}\sin\rho t\right)\right],$$

после математических преобразований получаем

$$\mathrm{I}_q=\frac{p^2\left(\alpha+2\varepsilon\right)}{2\varepsilon\omega_0^2\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}-\frac{2p\left[\left(\alpha+\varepsilon\right)\sin\rho t+\rho\cos\rho t\right]}{\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)^2-4\varepsilon^2\alpha^2}e^{-(\alpha+\varepsilon)t}+$$

$$+\frac{\omega_0^2\left(\varepsilon-\alpha\right)/\varepsilon+\left(\omega_0^2+\alpha\varepsilon-2\varepsilon^2\right)\cos 2pt-p\left(\alpha-2\varepsilon\right)\sin 2\rho t}{2\omega_0^2\left(\omega_0^2+\alpha^2-2\varepsilon\alpha\right)}e^{-2\varepsilon t}.$$

Вычислим интеграл I_0:

$$\mathrm{I}_0=\int_0^t\sin^2 p\left(t-\tau\right)e^{-2\varepsilon(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{4\varepsilon\omega_0^2}\left[p^2-\left(\omega_0^2-\varepsilon^2\cos 2pt+p\varepsilon\sin 2\rho t\right)e^{-2\varepsilon t}\right].$$

Теперь после математических преобразований имеем

$$D_{y(t)}=\sigma^2\left[\frac{\omega_0^2\left(\alpha+2\varepsilon\right)+4\varepsilon^2\alpha}{2\varepsilon\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}-\frac{2\left(\omega_0^4-4\varepsilon^2\alpha^2\right)}{\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)^2-4\varepsilon^2\alpha^2}\left(\cos\rho t+\frac{\alpha+\varepsilon}{p}\sin pt\right)e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\right]-$$

$$-\frac{\sigma^2e^{-2\varepsilon t}}{2p^2\left(\omega_0^2+\alpha^2-2\varepsilon\alpha\right)}\left\{\omega_0^4\left(\alpha-\varepsilon\right)/\varepsilon+4\varepsilon\alpha\left(\omega_0^2+\varepsilon\alpha\right)-\right.$$

$$\left.-\left[\omega_0^4+\varepsilon\left(\alpha-2\varepsilon\right)\omega_0^2-4\varepsilon^2\alpha\left(\alpha-\varepsilon\right)\right]\cos 2\rho t+p\left[\omega_0^2\left(\alpha-2\varepsilon\right)+4\alpha\varepsilon^2\right]\sin 2\rho t\right\}. \qquad (9)$$

Определим дисперсию относительно перемещения массы $\Delta=y_0-y$

$$D_\Delta=M\left\{\left[y_{0(t)}-y_{(t)}\right]^2\right\}=D_{y_0}+D_y-2K_{yy_0}.$$

Корреляционный момент с учетом решения (2) равен

$$K_{yy_0}=\frac{1}{p}\int_0^t\kappa\left(t-\tau\right)\left\{\omega_0^2M\left[y_{0(t)}\,y_{0(\tau)}\right]+2\varepsilon M\left[y_{0(t)}\,\dot y_{0(\tau)}\right]\right\}d\tau.$$

Здесь $M\left[y_{0(t)}\,y_{0(\tau)}\right]=K_{y_0}\left(t,\tau\right)=\sigma^2e^{-\alpha|t-\tau|}$,

$$M\left[y_{0(t)}\frac{\partial y_{0(\tau)}}{\partial\tau}\right]=\frac{\partial}{\partial\tau}M\left[y_{0(t)}\,y_{0(\tau)}\right]=\sigma^2\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-\alpha|t-\tau|}=\alpha\,\sigma^2e^{-\alpha|t-\tau|}Sign\left(t-\tau\right).$$

Учитывая, что под интегралом $t\geq\tau$, получаем:

$$K_{yy_0}=\frac{\sigma^2}{p}\int_0^t\kappa\left(t-\tau\right)\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau=\sigma^2\frac{\omega_0^2+2\varepsilon\alpha}{\omega_0^2+2\varepsilon\alpha+\alpha^2}\left[1-\left(\cos\rho t+\frac{\alpha+\varepsilon}{p}\sin\rho t\right)e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\right] \qquad (10)$$

Дисперсия отклонения Δ в момент времени t_k с учетом формул (9) и (10) равна

$$D_\Delta\left(t_k\right)=\sigma^2\left[\frac{\alpha\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)}{2\varepsilon\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}+\frac{2\alpha^2\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)}{\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)^2-4\varepsilon^2\alpha^2}\left(\cos\rho t_k+\frac{\alpha+\varepsilon}{p}\sin\rho t_k\right)e^{-(\alpha+\varepsilon)t_k}\right]-$$

$$-\frac{\sigma^2 e^{-2\varepsilon t_k}}{2p^2\left(\omega_0^2+\alpha^2-2\varepsilon\alpha\right)}\left\{\omega_0^4\left(\alpha-\varepsilon\right)/\varepsilon+4\varepsilon\alpha\left(\omega_0^2+\varepsilon\alpha\right)-\left[\omega_0^4+\varepsilon\left(\alpha-2\varepsilon\right)\omega_0^2-4\alpha\varepsilon^2\left(\alpha-\varepsilon\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos 2\rho t_k+p\left[\omega_0^2\left(\alpha-2\varepsilon\right)+4\alpha\varepsilon^2\right]\sin 2\rho t_k\right\}.$$

При $t_k > t_з$ (после переходного процесса) имеем

$$D_\Delta=\frac{\sigma^2\alpha\left(\omega_0^2+2\varepsilon\alpha\right)}{2\varepsilon\left(\omega_0^2+\alpha^2+2\varepsilon\alpha\right)}. \tag{11}$$

Стандарт отклонения (ошибка прибора) $\sigma_\Delta=\sqrt{D_\Delta}$.

Список литературы

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
2. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. — М.: Машиностроение, 1991. — 320 с.

УДК 519.62

Д.М.Диарова

Атырауский институт нефти и газа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ НЬЮТОНОВОЙ ЗАДАЧИ ДЕСЯТИ ТЕЛ

Мақалада 10 дененің шектелген Ньютон есебінің стационар шешулерінің сызықтық орнықтылық мәселесі зерттелген. 9 дененің гравитациялық өрісінде нольдік массаның қозғалыс моделі қарастырылған. Айналмалы координаталар жүйесінде қозғалыстағы денелер концентрлік ромбпен тіктөртбұрыштан тұратын конфигурация құрайды. Есептің сызықтық орнықты болатын тепе-теңдік қалыптары табылды. Модельдің кейбір параметрлері үшін сызықтық орнықты болатын аралықтар анықталды. Зерттеуде «Mathematica» символдық есептеу жүйесі қолданылды.

In this article the problem of linear stability of stationary solutions of the Newtonian restricted 10-body problem is investigated. The model in which the body having zero weight moves in a field of gravitation of the 9 bodies is considered. In a rotating coordinate system the 9 bodies forms a configuration consisting of a concentric rhombus and a rectangle. In a first approximation the stable positions of equilibrium of a problem are found. Intervals of linear stability are found for some values of parameters of model. In research the System of symbolical calculations «Mathematica» is applied.

В статье [1] установлено, что в ограниченной задаче десяти тел, главная конфигурация которой состоит из концентрических ромба и прямоугольника (рис. 1), существуют такие значения параметров модели, при которых стационарные решения (положения равновесия) являются устойчивыми в первом приближении. Цель данной статьи — определение интервалов их линейной устойчивости.

В рассматриваемой модели нулевая масса $P(x,y)$ движется в гравитационном поле девяти тел P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, имеющих соответственно массы m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, причём $m_1=m_3$, $m_2=m_4$, $m_5=m_6=m_7=m_8$ [1]. Тело P_0 помещено в начало системы координат P_0xy, квадрат угловой скорости вращения которой выражается формулой [1,2]:

$$\omega^2=m_0+\frac{m_1}{4}+\frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}}+\frac{2(1+\beta)m_5}{((1+\beta)^2+\gamma^2)^{3/2}}+\frac{2(1-\beta)m_5}{((1-\beta)^2+\gamma^2)^{3/2}}. \tag{1}$$