О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ОГРАНИЧЕННОЙ Р- ВАРИАЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ПО СИСТЕМАМ ХААРА ИЛИ УОЛША

Ахажанов Т.Б.[1], Танин А.О.[2]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан*

[2] *Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Караганда*

В данной работе доказывается прямая и обратная теоремы приближения функций многих переменных ограниченной р- вариации полиномами Хаара и Уолша.

Определения. Пусть функция $f(x_1,...,x_N)$ определена на множестве $[0,1]^N$ и $\rho=\rho_1\times\rho_2\times...\times\rho_N$, где $\rho_j=\{0=x_j^0<x_j^1<...<x_j^s=1\}$, $s_j\ge 1$, $j=1,...,N$ - произвольное разбиение множества $[0,1]^N$. Вариационной суммой порядка p $(1\le p<\infty)$ функции $f(x_1,...,x_N)$ по разбиению ρ назовем величину $\chi_\rho^p(f)=\left(\sum_{r_1=1}^{s_1}...\sum_{r_N=1}^{s_N}\left|\Delta_1\left(f;x_1^{r_1-1},...,x_N^{r_N-1};h_1^{r_1},...,h_N^{r_N}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, где

$$\Delta_1\left(f;x_1,...,x_N;h_1,...,h_N\right):=\sum_{\eta_1=0}^{1}...\sum_{\eta_N=0}^{1}(-1)^{\eta_1+...+\eta_N}f(x_1+\eta_1h_1,...,x_N+\eta_Nh_N),$$

$$(x_1,...,x_N)\in[0,1]^N \text{ и } h_1,...,h_N>0,\quad h_j^{r_j}:=x_j^{r_j}-x_j^{r_j-1},\ r_j=1,2,...,s_j,\ j=1,2,...,N.$$

Для функции одной переменной понятие вариационной суммы впервые ввел Винер [1], для функций двух переменных -Л.Кларксон и С.Адамс [2]. Вариационным модулем непрерывности $\omega_{1-1/p}\left(f,\delta_1,...,\delta_N\right)$ порядка $1-1/p$ функции $f(x_1,...,x_N)$ называется величина $\omega_{1-1/p}\left(f,\delta_1,...,\delta_N\right)=\sup_{|\rho_j|\le\delta_j}\chi_\rho^p(f)$ где $|\rho_j|=\max_{1\le r_j\le s_j}\left(x_j^{r_j}-x_{j-1}^{r_j}\right)$. Будем говорить, что $f\in BV_p[0,1]^N$, $1\le p<\infty$, если $V_p\left(f,[0,1]^N\right)\equiv\omega_{1-1/p}(f,1,...,1)<\infty$, и что $f\in C_p[0,1]^N$, $1<p<\infty$, если $\lim_{\delta_j\to 0}\omega_{1-1/p}(f,\delta_1,...,\delta_N)=0$. Свойства вариационного модуля непрерывности для функции одной переменной исследованы А.П. Терехиным [3], С.С. Волосивецем [4]. Пространства $BV_p[0,1]^N$ и $C_p[0,1]^N$ являются банаховыми с нормой $\|f\|_{BV_p}=\max\left\{\sup_{(x_1,...,x_N)\in[0,1]^N}|f(x_1,...,x_N)|,V_p\left(f,[0,1]^N\right)\right\}$. Пусть теперь $r_0(x)$ равна 1 на $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ и -1 на $\left[\frac{1}{2},1\right)$. Продолжим ее периодически с периодом 1 на всю ось. Тогда функциями Радемахера $r_k(x)$ называются функции $r_0(2^kx)$, $k=1,2,...$. Функции Уолша в нумерации Пэли определяются следующим образом (см. [5]). Положим $w_0(x)\equiv 1$. При $n\in\mathrm{N}$ рассмотрим двоичную запись n: $n=\sum_{i=0}^{k(n)}\varepsilon_i2^i$; $\varepsilon_{k(n)}=1$; $\varepsilon_i=0$ или $\varepsilon_i=1$, $0\le i<k(n)$. Тогда $w_n(x)=\prod_{i=0}^{k(n)}\left(r_i(x)\right)^{\varepsilon_i}$ n-я функция Уолша. Функции системы Хаара на $[0,1)$ задаются так: $h_0(x)=1$ при $x\in[0,1)$; если же $n=2^k+j$, $k\in P=N\cup\{0\}$, $0\le j<2^k$ и $\Delta_j^{(k)}=\left[\frac{j}{2^k},\frac{j+1}{2^k}\right)$, то $h_n(x)=\begin{cases}2^{k/2}, x\in\Delta_{2j}^{(k+1)}\\ -2^{k/2}, x\in\Delta_{2j+1}^{(k+1)}\\ 0, x\in[0,1)\setminus\Delta_j^{(k)}\end{cases}$. Пусть $\overline{x}=(x_1,...,x_N)\in[0,1]^N$, $\overline{n}=(n_1,...,n_N)$ -параметр суммирования, $n_i\in N$, $i=1,...,N$, тогда кратную систему Хаара и Уолша определим следующим образом:

$h_{\bar n}(\bar x)=\prod_{i=1}^{k} h_{n_i}(x_i)$, $w_{\bar n}(\bar x)=\prod_{i=1}^{k} w_{n_i}(x_i)$. Через $E_{\bar n}^{h}(f)_X$, $\left(E_{\bar n}^{w}(f)_X\right)$ соответственно будем обозначать наилучшее приближение функции $f\in X[0,1]^N$ полиномами по системе Хаара (Уолша) порядка не выше $n_1\times\ldots\times n_N$ $(n_j\in N)$ в метрике $X[0,1]^N$, где $X[0,1]^N=BC_p[0,1]^2$, $1<p<\infty$ или $X[0,1]^N=BV_p[0,1]^N$, $1\le p<\infty$, $E_{\bar n}(f)_X=\inf\limits_{c_{\bar i}}\left\|f(x_1,\ldots,x_n)-\sum_{i=1}^{s_i}c_{\bar i}\chi_{\bar i}(\bar x)\right\|_X$. Через $S_{\bar n}^{h}(f)$, $\left(S_{\bar n}^{w}(f)\right)$ обозначим частичную сумму ряда Фурье по системе Хаара (Уолша) функции f. Через $K_{\alpha,\beta,\ldots,\gamma}$ - обозначим положительные постоянные, зависящие от параметров $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$, вообще говоря, различные в разных формулах. Основной целью данной работы является доказательство следующей теоремы, являющейся аналогом прямой теоремы теории приближения функций полиномами по системе Уолша или Хаара.

Теорема 1. Пусть $f\in C_p[0,1]^N$, $1<p<\infty$. Тогда верны неравенства

$$E_{\bar n}^{h}(f)_{BV_p}\le K_p\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_N}\right),\qquad E_{\bar n}^{w}(f)_{BV_p}\le K_p\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_N}\right).$$

Теорема 2. Пусть $f\in C_p[0,1]^N$, $1<p<\infty$. Тогда верны неравенства

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_N}\right)\le K_pE_{\bar n}^{h}(f)_{BV_p},\qquad \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f,\frac{1}{n_1},\ldots,\frac{1}{n_N}\right)\le K_pE_{\bar n}^{w}(f)_{BV_p}.$$

Для случай функций одной переменной подобные теоремы были доказаны в работе [4].

Список использованных источников

1. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients / Massachusetts J.Math., 3(1924), p. 72-94 .
2. *Clarkson J.A. and Adams C.R.* On definitions of bounded variation for functions of two variables / Trans. Amer. Math. Soc., 35(1933),p. 824-854 .
3. *Терехин А.П.* Приближение функций ограниченной p- вариации / Изв. Вузов. Математика. 1965. №2. с.171-187 .
4. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p- вариации полиномами по системам Хаара и Уолша / Мат. Заметки. 1993. Т 53. №6. с.11-21.
5. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. / Москва «Наука», 1987 г. 345 с.

ON THE ESTIMATE OF THE NORM OF THE VECTOR-VALUED FOURIER MULTIPLIERS ON GENERALIZED PERIODIC MORREY SPACES

Baituyakova Zh, Ilyasova M, Keulimzhaeva Zh.

L.N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Kazakhstan

E-mail: baituyakova.zhzh@yandex.ru

In this paper we present the estimate of the norm of the Fourier multipliers on generalized periodic Morrey space by the norm on Bessel potential space.

Let $0\le p<\infty$ and let $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$. Then the generalized periodic Morrey space $M_p^{\varphi}(T^d)$ is the collection of all functions $f:R^d\to C$, 2π -periodic in each component, such that $f\in L_p(B(x,r))$ for all $x\in R^d$ and all $r>0$ and

$$\left\|f\middle|M_p^{\varphi}(T^d)\right\|:=\sup_{x\in[-\pi,\pi]^d}\ \sup_{0<r\le2\sqrt{d}\pi}\varphi(r)\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

In the definition of generalized Morrey space we assume, that $\varphi\in G_p$.