

Н.К.Медеубаев¹, Б.М.Нурланова¹, А.Ж.Сейтмуратов²

¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;

²Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата (E-mail: aibekyo@mail.ru)

Приближённое уравнение колебания пластин из изотропного однородного материала

Получены приближённые уравнения собственных колебаний двухслойной пластинки при заданных механических и геометрических характеристиках, являющихся основными элементами сейсмостойкости строительных конструкций. Задача решена приближённым методом получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции. Для определения частот собственных колебаний плоского элемента прямоугольной формы применены условия теоремы Гурвица.

Ключевые слова: метод декомпозиции, гармонические волны, параболические уравнения типа Кирхгофа, дифференциальные уравнения в частных производных, модель Максвелла.

Задача сейсмостойкости строительной конструкции в ряде случаев может быть сведена к исследованию прочностных характеристик используемых материалов под нагрузками колебательного характера. Изучение их составляет предмет общей теории колебаний и теории волн, получивших в настоящее время широкое развитие.

Результаты данных исследований приносят огромную пользу при рассмотрении стационарных, нестационарных колебательных и волновых процессов в таких разделах науки, как гидродинамика, геофизика. Кроме того, они относятся к классу краевых задач, когда два противоположных края прямоугольной пластинки шарнирно опёрты, а два других края имеют другие условия закрепления или свободны от напряжений.

Если все четыре края произвольно закреплены, то получить точные частотные уравнения типа описанных выше не представляется возможным. Для таких задач можно успешно применять приближённый метод получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции, развитого в работах профессора Г.И. Пшеничного [1] для задач статики.

При решении прикладных задач колебания прямоугольных плоских элементов возникает широкий класс задач колебаний, связанных с различными краевыми задачами: приближёнными уравнениями колебания, различными граничными условиями на краях плоского элемента и начальными условиями. В теории колебания важным моментом является определение частот собственных колебаний, решение задач о вынужденных колебаниях плоского элемента и исследование распространения гармонических волн в них.

Большинство задач по определению частот собственных колебаний плоских элементов, шарнирно опёртых по краям, и на основе приближённых теорий, полученных на основе гипотез и предположений механического и геометрического характера, в частности, на основе приближённых уравнений типа уравнения Кирхгофа параболического типа, плохо описывающих волновой и колебательный характер поведения плоского элемента при нестационарных внешних воздействиях.

Систематизируем результаты приближённых уравнений поперечного колебания плоских элементов, возможных граничным условиям на краях плоского элемента, и начальные условия, необходимые для решения частных задач собственных и вынужденных колебаний плоского элемента, распространения в них гармонических волн и других задач.

Приближённое уравнение поперечных колебаний четвертого порядка следующее [2]:

$$P_0(W) \equiv p \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{h^2}{6} \left[p^2 (N^{-1} + 3M^{-1}) \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} - 4p(3 - 2MN^{-1}) \Delta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 8M(1 - MN^{-1}) \Delta^2 W \right] = \Phi(\varphi_z, f_{1z}) \quad (1)$$

и приближённое уравнение шестого порядка:

$$P_0(W) + \frac{h^2}{120} \left[P^3 (N^{-2} + 10N^{-1} + 5M^{-2}) \frac{\partial^6 W}{\partial t^6} - 4p^2 (3N^{-1} + 9M^{-1} - 4MN^{-2}) \times \Delta \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + 16p(4 + 3MN^{-1} - M^2 N^{-2}) \Delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 32M(1 - MN^{-1}) \Delta^3 W \right] = \Phi(\varphi_z, f_{1z}).$$

Рассмотрим некоторые приближённые уравнения.

Приближённое уравнение типа Кирхгофа:

$$D\Delta^2W + \rho \frac{d^2W}{dt^2} = q;$$

$$D = \frac{4\mu h^2(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)},$$

где D — цилиндрическая жёсткость. Уравнение параболического типа.

Приближённое уравнение по модели С.П. Тимошенко [3]:

$$\rho \frac{d^2W}{dt^2} + \frac{\rho^2 h^2}{2\mu} \frac{d^4W}{dt^4} - \frac{h^2 p(7\lambda + 8\mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \Delta \frac{d^2W}{dt^2} + \frac{4\mu h^2(\lambda + \mu)}{3(\lambda + \mu)} \Delta^2 W = q.$$

Приближённое уравнение поперечных колебаний трёхслойной пластинки:

$$\left[D^{(1)} + D^{(2)} \right] \Delta^2 W + [p_1 h_1 + p_2 (h_2 - h_1)] \frac{d^2W}{dt^2} = q,$$

где $D^{(1)}$ равны

$$D^{(1)} = \frac{E_1 h_1^3}{2(1 - \nu_1^2)}; \quad D^{(2)} = \frac{E_2 (h_2 - h_1)^3}{2(1 - \nu_2^2)}.$$

При решении частных задач материал плоского элемента может быть упругим или частично, или полностью проявлять вязкие свойства.

При исследовании колебания и волновых процессов в твердом деформируемом теле ядро вязкоупругих операторов целесообразно брать регулярными, так как только такие операторы описывают мгновенную упругость, а затем вязкое течение, что характерно для деформируемых твердых тел. Интегро-дифференциальные уравнения с регулярными ядрами, как известно, эквивалентны дифференциальным уравнениям в частных производных.

Для простоты рассмотрим пластинку из изотропного однородного материала. Если материал пластинки упругий, то уравнение (1) запишем в виде

$$A_0 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} - A_1 \Delta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + A_2 \Delta^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \Phi(f_z, f_{jz}), \quad (j = x, y), \quad (2)$$

где коэффициенты A_j равны

$$A_0 = \frac{h^2(7 - 8\nu)}{12b^2(1 - \nu)}; \quad A_1 = \frac{2h^2(2 - \nu)}{3(1 - \nu)}; \quad A_2 = \frac{2h^2 b^2}{3(1 - \nu)};$$

ν — коэффициент Пуассона; b — скорость распространения поперечных волн в материале пластинки.

Если материал пластинки удовлетворяет модели Максвелла, т.е. операторы L, M равны

$$(L, M)(\xi) = (\lambda, \mu) \left[\xi(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \xi(\xi) d\xi \right], \quad (3)$$

где τ — лишь одно время релаксации, то уравнение (2) примет вид

$$A_0 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) - A_1 \Delta \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial W}{\partial t} \right) + A_2 \Delta^2 W + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial W}{\partial t} \right) = \Phi_1(f_z, f_{jz}). \quad (4)$$

Как видно, ядро (3) регулярное и вместо уравнения (2) имеем уравнение (4). Уравнение (4) можно обобщить для любого регулярного ядра, содержащего конечное число регулярных составляющих.

Для других приближённых уравнений колебаний плоского элемента эти уравнения для регулярных ядер также можно привести к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Рассмотрим наиболее простую краевую задачу определения частот собственных колебаний плоского элемента прямоугольной формы в плане, занимающем часть пространства $(0 \leq x \leq l_1; 0 \leq y \leq l_2; |z| \leq h)$, края которого шарнирно опёрты. Толщина плоского элемента равна $2h$.

Пусть плоским элементом является изотропная однородная прямоугольная пластинка толщиной $2h$ и размерами l_1 и l_2 в плоскости (x, y) в направлении осей x и y соответственно.

В качестве приближённого уравнения колебания пластинки примем уравнение четвёртого порядка, при этом материал пластинки описывается моделью Максвелла, или уравнением шестого порядка для упругого материала пластинки. Правые части уравнений полагаем равными нулю.

В случае опёртой пластинки для уравнения (4) имеем известные граничные условия:

$$\begin{aligned} W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, (x = 0; l_1); \\ W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, (y = 0; l_2), \end{aligned} \tag{5}$$

а для уравнения шестого порядка (1) — следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0, (x = 0; l_1); \\ W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0, (y = 0; l_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Решение уравнений (2) и (1) при граничных условиях (5) или (6) можно искать в виде

$$W = \exp\left(\frac{b}{h}\xi t\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{n,m} \sin\left(\frac{\pi n x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l_2}\right), \tag{7}$$

где ξ — безразмерная комплексная величина, действительная часть которой описывает затухающий характер колебаний, а мнимая часть определяет частоты собственных колебаний шарнирно опёртой пластинки.

Подставляя решение (7) в уравнение (2), для определения частоты ξ получаем алгебраическое уравнение четвёртой степени:

$$\begin{aligned} B_0 \xi^4 + \frac{2B_0}{\tau_0} \xi^3 + (1 + \frac{B_0}{\tau_0^2} + B_1 \gamma) \times \\ \times \xi^2 + \frac{1}{\tau_0} (1 + B_1 \gamma) \xi + B_2 \gamma^2 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где коэффициенты B_j ; τ_0 ; γ равны.

$$\begin{aligned} B_0 = \frac{7-8\nu}{12(1-\nu)}; B_1 = \frac{2(2-\nu)}{3(1-\nu)}; B_2 = \frac{2}{3(1-\nu)}; \\ \tau_0 = \frac{b\tau}{h}; \gamma = \pi^2 \left[\left(\frac{nh}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{mh}{l_2}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

При этом τ_0 — безразмерное время релаксации; ν — коэффициент Пуассона материала пластинки; γ — безразмерный параметр, характеризующий геометрические размеры пластинки и номера гармоник (n, m) в решении (7).

Аналогично, подставляя решение (7) в уравнение (1), получаем для ξ алгебраическое уравнение шестой степени:

$$B_3 \xi^6 + (B_0 + B_4 \gamma) \xi^4 + (1 + B_5 \gamma^2 + B_1 \gamma) \xi^2 + (B_2 + B_6 \gamma) \gamma^2 = 0, \tag{9}$$

где коэффициенты B_3, \dots, B_6 равны

$$\begin{aligned} B_3 = \frac{64\nu^2 - 104\nu + 41}{480(1-\nu)^2}; B_4 = \frac{16\nu^2 - 37\nu + 19}{60(1-\nu)^2}; \\ B_5 = \frac{24\nu^2 - 46\nu + 21}{30(1-\nu)^2}; B_6 = \frac{4}{30(1-\nu)}. \end{aligned}$$

Из теоремы Гурвица [4] следует, что алгебраическое уравнение (8) имеет решения, действительная часть которых отрицательна, т.е. действительная часть комплексной частоты ξ отрицательна, а уравнение (9) имеет корни, определяющие три частоты собственных колебаний пластинки в соответствии с уравнением шестого порядка (1).

Если решать задачу на основе параболического уравнения (3), то имеем лишь одну частоту:

$$\xi = \gamma \sqrt{B_2}. \tag{10}$$

Уравнение (10) описывает лишь изгибные колебания пластинки, уравнение (2) учитывает не только изгибные колебания, но и инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига, уравнение же (10) описывает также и другие более тонкие волновые эффекты, имеющие место в пластинке.

Если из общего уравнения колебания получать и другие приближённые уравнения конечного порядка выше шестого, то для комплексной частоты ξ получаем алгебраическое уравнение степени выше шестой и соответственно можем определить и другие частоты собственных колебаний.

Уравнение (1) можно обобщить и для материала пластинки, описываемой моделью Максвелла. Данное уравнение нетрудно получить, заменяя в уравнении (1) производные по времени от поперечного смещения:

$$\frac{\partial^6 W}{\partial t^6}; \quad \frac{\partial^4 W}{\partial t^4}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

на следующие комбинации:

$$\left(\frac{\partial^6 W}{\partial t^6} + \frac{3}{\tau} \frac{\partial^5 W}{\partial t^5} + \frac{3}{\tau^2} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + \frac{1}{\tau^3} \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} \right);$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right); \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial W}{\partial t} \right)$$

соответственно.

В этом случае алгебраическое уравнение для определения частоты (9) для упругой пластинки будет содержать и все нечётные степени ξ не выше шестой.

References

- 1 *Pshenichnyi G.I.* Decision of some problems of building mechanics a method of decomposition // Building mechanics and calculation of constructions, 1986. — №4. — P. 12–17.
- 2 *Seitmuratov A.Zh.* Dynamic stability of flat elements in building designs // Modern problems of perfection and progress of metal, wooden, plastic designs in construction and on transport: SSACU. — Samara, 2005. — P. 75–79.
- 3 *Phillipov I.G., Cheban V.G.* Mathematical the theory of fluctuations of elastic and viscoelastic plates and cores. — Kishinev: Shiniitsa, 1988. — P. 190.
- 4 *Phillipov I.G.* Precise of the equation of cross-section fluctuations of viscoelastic plates // Works All-Union Conf. on dynamics grounds, the bases and underground constructions. — Leningrad: Narva, 1995. — P. 63–69.

Н.Қ.Медеубаев, Б.М.Нұрланова, А.Ж.Сейітмұратов

Изотропты біртекті материалдан құралған қабықша тербелісінің жуық теңдеуі

Мақалада құрылыстық конструкциялардың сейсмөзімділігінің негізгі элементтері болып табылатын берілген механикалық және геометриялық сипаттамаларда екіқатпарлы пластинканың меншікті тербелісінің жуық теңдеуі алынды. Есеп декомпозиция әдісінің негізінде жиілік теңдеулерін алу үшін жуықтау әдісімен шешілген және тікбұрышты формадағы жазық элементтің меншікті тербелісінің жиілігін анықтау үшін Гурвиц теоремасының шарттары қолданылған.

N.K.Medeubayev, B.M.Nurlanova, A.Zh.Seiytmuratov

The approached equation of fluctuation of plates from the isotropic homogeneous material

The approached equation of own fluctuations of a two-layer plate are received at for given mechanical and geometrical characteristics, being cores of an elements of seismic stability of building designs. The problem is solved by the approached method of reception of the frequency equations on the basis of a method of decomposition and conditions of Gurvits theorem is applied to definition of frequencies of own fluctuations of a flat element of the rectangular form.