МАТЕМАТИКА

УДК 517.968

А.Асанов[1], Б.Калимбетов[2], А.Тойгонбаева[3]

[1]Университет «Манас», Бишкек, Республика Кыргызстан;
[2]Международный казахско-турецкий университет им. Ясави, Туркестан;
[3]Ошский государственный университет, Республика Кыргызстан (E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода

В статье рассмотрено линейное интегральное уравнение Фредгольма-Стилтьеса первого рода. Используя метод, предложенный А.Асановым, получены оценки устойчивости и построен регуляризирующий оператор, по М.М.Лаврентьеву, для решения сингулярно возмущенного интегрального уравнения первого рода. Исследованы вопросы единственности решения интегрального уравнения и доказана теорема об оценке устойчивости решений в классе L_2.

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма-Стилтьеса первого рода, регуляризирующий оператор, ортонормированные собственные функции.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t),\ t \in [a,b], \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$;

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t \le b; \\ B(t,s), & a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что $A(t,s)$, $B(t,s)$ и $f(t)$ — заданные функции; $u(t)$ — искомая функция.

Различные вопросы для интегральных уравнений исследовались во многих работах [1–4]. В частности, в работе [1] предложен метод регуляризации для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. В работе [4] исследовались вопросы единственности решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. В данной работе, используя метод, предложенный в [4], получены оценки устойчивости и построен регуляризирующий оператор, по М.М.Лаврентьеву, для решения интегральных уравнений первого рода (1).

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде:

$$\int_a^b A(t,s)u(s)d\varphi(s) + \int_a^b B(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t). \tag{3}$$

Умножая обе части (3) на $u(t)$ и интегрируя по t в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) + \int_a^b\int_t^b B(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t). \tag{4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^b\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) + \int_a^b\int_a^s B(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t),$$

то есть

$$\int_a^b \int_a^t \left[A(t,s)+B(s,t)\right]u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t)=\int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t).$$

Обозначим $H(t,s)=\dfrac{1}{2}[A(t,s)+B(s,t)].$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$2\int_a^b \int_a^t H(t,s)u(s)d\varphi(s)u(t)d\varphi(t)=\int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t). \tag{5}$$

Предполагаем, что ядро $H(t,s)\in C(G),$ где $G=\{(t,s):\ a\le s\le t\le b\}$.

Введем новую функцию $M(t,s)$ следующим образом:

$$M(t,s)=\begin{cases} H(t,s), & a\le s\le t\le b;\\ H(s,t), & a\le t\le s\le b.\end{cases} \tag{6}$$

Ясно, что $M(t,s)=M(s,t).$

Поскольку H $(t,s)\in L_2[a,b]\times[a,b],$ тогда известно, что

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}, \tag{7}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...$— характеристические числа ядра $M(t,s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le...$, и $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...$ — соответствующие ортонормированные собственные функции, т.е.

$$\varphi_i(t)=\lambda_i\int_a^b M(t,s)\varphi_i(t)ds, \qquad i=1,2,...$$

Пусть $M(t,s)$ — полное ядро, где $0<\lambda_1\le\lambda_2\le...$. Семейство множеств корректностей M_α, зависящее от параметра α,

$$M_\alpha=\left\{u(t)\in C[a,b]:\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\alpha|u_i|^2\le c\right\},$$

где $c>0, 0<\alpha<\infty, u_i=\int_a^b u(t)\varphi_i(t)d\varphi(t),\ (i=1,2,...).$

Если $u(t)\in M_\alpha$, то

$$\|u(t)\|_{L_2}^{\ 2}=\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\alpha|u_i|^2\le\frac{c}{\lambda_1^\alpha}.$$

Будем предполагать, что $f(t)\in K(M_\alpha)$. Тогда уравнение (1) имеет решение $u(t)\in M_\alpha$ и справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left|\int_a^b u(t)\varphi_i(t)d\varphi(t)\right|^2=\int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t)\le\int_a^b |f(t)|\cdot|u(t)|d\varphi(t)\le$$

$$\le\left(\int_a^b |f(t)|^2d\varphi(t)\right)^{1/2}\left(\int_a^b |u(t)|^2d\varphi(t)\right)^{1/2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}|u_i|^2\le\|f(t)\|_{L_2}\|u(t)\|_{L_2}. \tag{8}$$

С другой стороны, применив неравенство Гёльдера при $p=\dfrac{1+\alpha}{\alpha}$, $q=1+\alpha$, получим:

$$\|u(t)\|_{L_2}^{\ 2}=\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|u_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}|u_i|^{\frac{2}{1+\alpha}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|u_i|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\alpha|u_i|^2\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Учитывая, что $u(t)\in M_\alpha$ и неравенство (8), из последнего неравенства имеем

$$\left\|u(t)\right\|_{L_2}^{2}\le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left[\left\|f(t)\right\|_{L_2}\cdot\left\|u(t)\right\|_{L_2}\right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $\left\|u(t)\right\|_{L_2}^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, получим

$$\left\|u(t)\right\|_{L_2}^{2-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|f(t)\right\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

т.е. $\left\|u(t)\right\|_{L_2}^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}\le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|f(t)\right\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$.

Отсюда

$$\left\|u(t)\right\|_{L_2}\le\left[c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|f(t)\right\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}.$$

Следовательно, мы получим следующую оценку устойчивости:

$$\left\|u(t)\right\|_{L_2}\le c^{\frac{1}{2+\alpha}}\left\|f(t)\right\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},\ \ 0<\alpha<\infty. \tag{9}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть ядро $M(t,s)$ положительно определено, $K(M_\alpha)\subset C_{[a,b]}$ — образ M_α при отображении K. Тогда на множестве $K(M_\alpha)$ оператор K^{-1}, обратный к K, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\dfrac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (9).

Покажем, что решение уравнения

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_a^b K(t,s)u(s,\varepsilon)d\varphi(s)=f(t),\ t\in(a,b),\varepsilon>0 \tag{10}$$

будет регуляризирующим для уравнения (1) на множестве M_α.

В самом деле, сделав следующую подстановку в уравнение (10)

$$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t)\in M_\alpha$ — решение уравнения (1), получим

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_a^b K(t,s)\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s)=-\varepsilon u(t). \tag{11}$$

Отсюда, учитывая, что $M(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$ и умножая уравнение (11) на $\xi(t,\varepsilon)$ и интегрируя, имеем

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{L_2}^{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^2}{\lambda_i}\le\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right|\left|\xi_i(\varepsilon)\right|, \tag{12}$$

где $\xi_i(\varepsilon)$ — коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\left\{\varphi_i(t)\right\}_1^\infty$. Применяя неравенство Гёльдера при $p=q=\dfrac{1}{2}$, из (12) получим

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{L_2}\le\left\|u(t)\right\|_{L_2}; \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^2}{\lambda_i}\le\varepsilon\left\|u(t)\right\|_{L_2}^{2}\le\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}},\varepsilon>0, \tag{14}$$

с другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right|\left|\xi_i(\varepsilon)\right|=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u_i\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u_i\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha), m=2(1+\alpha), n=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha},$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i||\xi_i(\varepsilon)|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\alpha}|u_i|^2\right)^{\frac{1}{q}}\|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_2}^{\frac{1}{q}}\|u(t)\|_{L_2}^{\frac{1}{p}}.$$

Далее в силу $u(t)\in M_{\alpha}$, (13) и (14):

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i||\xi_i(\varepsilon)|\le\left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\|u(t)\|_{L_2}^{\frac{1}{q}}\|u(t)\|_{L_2}^{\frac{1}{p}},$$

Подставляя $p=\dfrac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha),$ получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i||\xi_i(\varepsilon)|\le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}\left(\frac{c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}},\tag{15}$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i||\xi_i(\varepsilon)|\le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}c^{\frac{1}{4}}c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\lambda_1^{-\frac{\alpha}{4}}\lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}};$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i||\xi_i(\varepsilon)|\le c^{\frac{3}{4}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+3\alpha)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}.\tag{16}$$

Учитывая (16), из (12) имеем

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_2}\le c^{\frac{3}{8}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+3\alpha)}{8(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\ 0<\alpha<\infty.\tag{17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть $f(t)\in K(M_{\alpha}),\ u(t)$ — решение уравнения (1); $u(t,\varepsilon)$ — решение уравнения (10). Тогда справедлива оценка (17).

Замечание. Если $f(t)\in K(M_1),$ то в силу неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i||\xi_i(\varepsilon)|\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|u_i|}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\lambda_i}\,|\xi_i(\varepsilon)|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

можно улучшить оценку (17), при $\alpha=1,$ а именно:

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_2}\le c^{\frac{1}{4}}\left(\frac{c}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}.$$

References

1 *Lavrent'ev M.M.* On integral equations of the first kind // Rep. AN USSR. — 1959. — T. 127. — № 1. — P. 31–38.

2 *Imanaliev M.I., Asanov A.* On the solutions of system of nonlinear Volterra integral equations of the first kind // Rep. AN USSR. — 1989. — T. 309. — № 5. — P. 1052–1058.

3 *Asanov A.* Regulization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. — Utrecht: VSP, 1998. — 272 p.

4 *Asanov A., Kadenova Z.A.* On the uniqueness of solutions for a class of integral equations of the first kind // Proceedings of the Scientific Conference «Mathematical modeling and boundary value problems». — Samara: Samara State Technical University, 2004. — P. 3. — P. 122-126.

А.Асанов, Б.Калимбетов, А.Тойгонбаева

Бірінші ретті Фредгольм-Стилтьес сызықтық интегралдық теңдеуінің бір класы туралы

Мақалада бірінші ретті Фредгольм-Стилтьес сызықтық интегралдық теңдеу қарастырылды. А.Асанов ұсынған әдісті қолдана отырып, бірінші ретті сингулярлы-ауытқулы интегралдық теңдеулерді шешу үшін, М.М.Лаврентьев бойынша, тұрақтылық бағасы алынып, регуляризациялау операторы құрылды. Интегралдық теңдеудің шешімінің жалғыз екені зерттелді және L_2 класында шешімдердің тұрақтылық бағасы туралы теорема дәлелденді.

A.Asanov, B.Kalimbetov, A.Toiygonbaeva

A class linear integral equations of Fredholm-Stilties of the first kind

In this article the linear integral equation of Fredgolm- Stilties of the first kind is given. Using the method proposed in A.Asanov, estimates and stability built on M.M.Lavrentev regularizing operator for solving singularly perturbed integral equations of the first kind. The questions of uniqueness of solution of the integral equation and prove a theorem about the sustainability assessment solutions in the classroom L_2.

УДК 517.956.3

Д.М.Ахманова, М.Т.Космакова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: ahk_danna@mail.ru)

К решению одного интегрального уравнения с одним переменным и другим бесконечным пределами интегрирования

В статье рассмотрено интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода с переменным нижним пределом интегрирования. Особенность уравнения заключается, во-первых, в том, что промежуток интегрирования бесконечный и, во-вторых, при стремлении нижнего предела к верхнему значение интеграла стремится к единице. Такого рода интегральные уравнения возникают при решении краевых задач теории теплопроводности в нецилиндрических областях. Также к ним сводятся краевые задачи для спектрально-нагруженных параболических уравнений.

Ключевые слова: интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода, краевые задачи с подвижной границей, преобразование Лапласа, модифицированная тета-функция.

При изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения, спектрально-нагруженных параболических уравнений, задач с подвижной границей и обратных задач для параболических уравнений и т.д. [1–5] возникает необходимость исследования особых интегральных уравнений вида:

$$\psi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t}^{\infty}K(t,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau=f(t),\quad (t>0),\tag{1}$$

где

$$K(\tau,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(\frac{\tau+t}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\}+\frac{1}{\sqrt{\tau-t}}\exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\}\right).\tag{2}$$

К таким уравнениям также сводятся краевые задачи с подвижной границей в случае температурного нагрева (первая краевая задача в нецилиндрической области):

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$