Список литературы

1. *Романов В.Г., Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. — М.: Наука, 1991. — 334 с.
2. *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2001. — 316 с.
3. *Алексеев А.С.* Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. — М.: Наука, 1967. — С. 9–84.

УДК 517.925.5

Б.Х.Жанбусинова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мақалада аргументтің ауытқуынан тұратын толқындық теңдеудің периодтық шешімдерінің бар болу сұрағы зерттелген. Автономдық жүйенің периодтық шешімін тұрғызу алгоритмі берілген. Бұл шешімнің тұрғызылуы үшін теңдеудің шешімі стандартты түрге келтіріліп орталандыру әдісі қолданылған. Аз параметрлі теңдеу үшін периодтық шешімнің бар болу теоремасы келтірілген.

The question of existence of periodic decisions of the wave equation containing a deviation of argument is investigated. The algorithm of construction of the periodic decision of the independent equation is given. For construction of this decision the equation is led. To standard kind the averaging method also is applied. The theorem of existence of the periodic decision for the equation with small parameter is resulted.

Широко известны колебательные системы, в которых возникновение автоколебательного режима, по существу, связано с наличием запаздывания. К их числу относится, например, электромагнитный прерыватель. Автоколебаниям, возникающим в системах, соответствуют устойчивые предельные циклы. Предельный цикл — это изолированная замкнутая траектория. Поэтому предельные циклы возможны лишь для уравнений, имеющих изолированные периодические решения.

Исследуем вопрос существования периодических решений у автономных уравнений. Этот вопрос представляет большой интерес, так как автономные уравнения имеют существенные особенности.

Во-первых, для неавтономных уравнений любое периодическое решение имеет вполне определенный, наперед заданный период, равный или кратный периоду правых частей. Автономные уравнения, в силу того, что не содержат явно времени, могут иметь периодические решения с некоторым периодом, который заранее неизвестен.

Во-вторых, если $x(t)$ — периодическое решение автономного уравнения, то $x(t+h)$, где h — постоянная величина, также является периодическим решением автономного уравнения.

Рассмотрим дифференциально-разностное автономное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x(t) = f\left(x(t), \frac{dx(t-\Delta)}{dt}\right), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — непрерывная по совокупности переменных x, y функция, которая определена в области $\Omega = \{-\infty < t < \infty, (x, y) \in D \times D\}$; Δ — постоянная, характеризующая запаздывание, причем $0 \le \Delta \le T$.

Предположим, что в области Ω функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию ограниченности и условию Липшица

$$|f(x, y)| \le M,\ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \le K_1|x_1 - x_2| + K_2|y_1 - y_2|,$$

где M, K_1, K_2 — положительные постоянные.

Сделаем в уравнении (1) замену переменной

$$t=\frac{\tau}{\omega}(1-a),\ \ \Delta=\frac{\delta}{\omega}(1-a)\,,\ a\neq 1\,,\ a-const\,.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+(1-a)^2x=\left(\frac{1-a}{\omega}\right)^2 f\left(x,\frac{\omega}{1-a}\frac{dx_\delta}{d\tau}\right)=\overline{f}\left(x,\frac{dx_\delta}{d\tau}\right). \tag{2}$$

Теперь 2π -периодические решения уравнения (2) будем искать по формулам:

$$x(\tau)=u(\tau)\cos\tau+v(\tau)\sin\tau\,,$$
$$\frac{dx}{d\tau}=\ -u(\tau)\sin\tau+v(\tau)\cos\tau\,, \tag{3}$$
$$\frac{dx_\Delta}{d\tau}=\ -u(\tau-\delta)\sin(\tau-\delta)+v(\tau-\delta)\cos(\tau-\delta)\,.$$

Так как $\frac{dx}{d\tau}=\frac{du}{d\tau}\cos\tau+\frac{dv}{d\tau}\sin\tau\ -u(\tau)\sin\tau+v(\tau)\cos\tau$, то на основании формулы (3) имеем

$$\frac{du}{d\tau}\cos\tau+\frac{dv}{d\tau}\sin\tau=0\,, \tag{4}$$
$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\frac{du}{d\tau}\sin\tau+\frac{dv}{d\tau}\cos\tau-u(\tau)\cos\tau-v(\tau)\sin\tau\,.$$

Подставив выражения для $x(\tau)$, $\frac{dx_\Delta}{d\tau}$ и $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ в (2), получим:

$$-\frac{du}{d\tau}\sin\tau+\frac{dv}{d\tau}\cos\tau=(2a-a^2)(u(\tau)\cos\tau+v(\tau)\sin\tau)+$$
$$+\left(\frac{1-a}{\omega}\right)^2\overline{f}\left(u(\tau)\cos\tau+v(\tau)\sin\tau;-u_\delta\sin(\tau-\delta)+v_\delta\cos(\tau-\delta)\right), \tag{5}$$

где $u_\delta=u(\tau-\delta)$, $v_\delta=v(\tau-\delta)$.

Решая систему уравнений, составленную из (4), (5), относительно $\frac{du}{d\tau}$ и $\frac{dv}{d\tau}$, получим:

$$\begin{cases}\frac{du}{d\tau}=(a^2-2a)\left(\frac{u}{2}\sin 2\tau+v\sin^2\tau\right)+\left(\frac{1-a}{\omega}\right)^2\overline{f}\left(\tau,x;\frac{dx_\delta}{d\tau}\right)\sin\tau;\\ \frac{dv}{d\tau}=(2a-a^2)\left(u\cos^2\tau+\frac{v}{2}\sin 2\tau\right)+\left(\frac{1-a}{\omega}\right)^2\overline{f}\left(\tau;x;\frac{dx_\delta}{d\tau}\right)\cos\tau,\end{cases} \tag{6}$$

где $f\left(x;\frac{dx_\delta}{d\tau}\right)=f\left(\ u(\tau)\cos\tau+v(\tau)\sin\tau,\quad -u(\tau-\delta)\sin(\tau-\delta)+v(\tau-\delta)\cos(\tau-\delta)\right)$.

Систему (6) можно сокращенно записать в виде

$$\frac{dy}{d\tau}=g\left(\tau,a,y,y_\delta\right), \tag{7}$$

где y и g — двумерные векторы, $g(\tau+2\pi,a,y,y_\delta)=g(\tau,a,y,y_\delta)$.

Рассмотрим усредненную систему, соответствующую системе (7):

$$\frac{d\xi}{d\tau}=g_0\left(a,\xi(\tau),\xi(\tau-\delta)\right), \tag{8}$$

где $g_0(a,\xi(\tau),\xi(\tau-\Delta))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\tau,a,\xi,\xi_\Delta)d\tau$.

Согласно теореме [1] система (7) имеет периодическое решение, если функция $\overline{g(\tau,\xi,\xi_\Delta)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\tau,\xi,\xi_\Delta)d\tau$ имеет изолированную особую точку, т.е. $\overline{g(\tau,\xi,\xi_\delta)}=0$. Следовательно, система (7) имеет периодическое решение, если усредненная система (8) имеет изолированное положение равновесия $\xi=\xi_0$, $g_0(a,\xi(\tau),\xi(\tau-\delta))=0$. Такая система при определенном выборе параметра

$a = a_0 \neq 1$ может иметь решение $\xi = \xi_0$, $g_0(a_0, \xi_0(\tau), \xi_0(\tau - \delta)) = 0$. Таким образом, значение параметра $a_0 \neq 1$ и определяет период $T = \dfrac{2\pi(1-a_0)}{\omega}$ периодического решения исходного уравнения.

Рассмотрим автономное волновое уравнение с малым параметром и отклонением аргумента

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x(t) = \varepsilon f\left(x(t), x(t-\Delta)\right),\ \varepsilon << 1. \tag{9}$$

Вопросы существования и построения периодических решений для широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка в классе аналитических функций изучены методом Пуанкаре, в классе гладких функций — с помощью асимптотических методов Крылова-Боголюбова-Митропольского, а также численно-аналитическими методами Самойленко [2–4]. Используя вышеизложенную методику, можно установить условия существования периодических решений уравнения (9) на основании второй основной теоремы Н.Н.Боголюбова и численно-аналитического метода Самойленко [2].

Изучим те периодические решения уравнения (9), которые при $\varepsilon = 0$ переходят в периодические решения $x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ соответствующего однородного уравнения. Период искомого периодического решения зависит от параметра ε:

$$T = T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\lambda(\varepsilon)},\ \text{где}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(\varepsilon) = \omega.$$

Таким образом, $\lambda(\varepsilon) = \dfrac{\omega}{1-\varepsilon\mu}$, $\varepsilon\mu \neq 1$.

Сделаем в уравнении (9) замену независимой переменной

$$t = \frac{\tau(1-\varepsilon\mu)}{\omega},\ \Delta = \frac{\Delta_1(1-\varepsilon\mu)}{\omega}. \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(1-\varepsilon\mu\right)^2 x = \varepsilon\left(\frac{1-\varepsilon\mu}{\omega}\right)^2 g(x, x_{\Delta 1}). \tag{11}$$

Из замены (10) следует, что значению $t = T$ соответствует $\tau = 2\pi$, т.е. период искомого решения уравнения (1) совпадает с периодом преобразованного уравнения (3), и он равен 2π.

Замечание. Следует отметить, что исследование *T*-периодических решений систем второго порядка справедливо как в автономных, так и в неавтономных случаях. Кроме того, согласно определению системы второго класса [5] период решения таких систем совпадает с периодом решения соответствующего однородного уравнения.

Перепишем систему уравнений (11) в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \varepsilon\left(2\mu - \varepsilon\mu^2\right)x + \varepsilon\left(\frac{1-\varepsilon\mu}{\omega}\right)^2 g(x, x_{\Delta 1}) = G\left(x(\tau), x(\tau-\Delta_1)\right), \tag{12}$$

из которого видно, что соответствующее однородное уравнение имеет 2π-периодическое решение $x(\tau) = C_1\cos\tau + C_2\sin\tau$.

Таким образом, существование 2π-периодических решений уравнения (11) можно исследовать на основании результатов, полученных в [5], т.е. с помощью интегрального уравнения

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \int_0^{2\pi} \Phi(\tau)\, G\left(x(\tau), x(\tau-\Delta_1)\right)\sin(t-\tau)d\tau,$$

где $x(\tau) = C_1\cos\tau + C_2\sin\tau$, а функция $\Phi(\tau)$ определена формулой

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{T},\ 0 \le \tau \le t, \\ -\dfrac{t}{T},\ t < \tau \le T \end{cases}$$

и на основании известных результатов соответствующих ему систем уравнений первого порядка стандартного вида.

Для уравнения (11) запишем соответствующую стандартную систему первого порядка. Сделав в уравнении (11) замену (3), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau}\cos\tau + \dfrac{dv}{d\tau}\sin\tau = 0; \\ -\dfrac{du}{d\tau}\sin\tau + \dfrac{dv}{d\tau}\cos\tau + \varepsilon\alpha\,(\varepsilon)(u(\tau)\cos\tau + v(\tau)\sin\tau) = \varepsilon\bar{g}\left(\mu,\tau,\tau-\Delta_1,u,v,u_{\Delta1},v_{\Delta1}\right), \end{cases}$$

здесь

$$\alpha(\varepsilon) = \varepsilon\mu^2 - 2\mu\,,$$

$$\bar{g}\left(\mu,\tau,\tau-\Delta_1,u,v,u_{\Delta1},v_{\Delta1}\right) = \left(\frac{1-\varepsilon\mu}{\omega}\right)^2 g\left(u(\tau)\cos\tau + v(\tau)\sin\tau, u(\tau-\Delta_1)\cos(\tau-\Delta_1) + v(\tau-\Delta_1)\sin(\tau-\Delta_1)\right).$$

Решая эту систему относительно $\dfrac{du}{d\tau}, \dfrac{dv}{d\tau}$, получим стандартную систему уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = \varepsilon\alpha(\varepsilon)\left(\dfrac{u}{2}\sin 2\tau + v\sin^2\tau\right) - \varepsilon\bar{g}\left(\mu,\tau,\tau-\Delta_1,u,v,u_{\Delta1},v_{\Delta1}\right)\sin\tau \equiv \varepsilon f_1\left(\mu,\tau,\tau-\Delta_1,u,v,u_{\Delta1},v_{\Delta1}\right); \\ \dfrac{dv}{d\tau} = -\varepsilon\alpha(\varepsilon)\left(u\cos^2\tau + \dfrac{v}{2}\sin 2\tau\right) + \varepsilon\bar{g}\left(\mu,\tau,\tau-\Delta_1,u,v,u_{\Delta1},v_{\Delta1}\right)\cos\tau \equiv \varepsilon f_2\left(\mu,\tau,\tau-\Delta_1,u,v,u_{\Delta1},v_{\Delta1}\right) \end{cases}$$

или сокращенно:

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon f\left(\mu,\tau,\tau-\Delta_1,y,y_{\Delta1}\right), \tag{13}$$

где y и f двумерные векторы — $y = (u,v)$, $f = (f_1,f_2)$.

Таким образом, на основании второй основной теоремы Н.Н.Боголюбова [3, 4] получим следующее утверждение.

Теорема. *Пусть при некотором значении* $\mu = \mu_0$ *уравнение* (12) *является* 2π*-периодической системой второго класса, и правая часть системы* (13) *удовлетворяет условиям второй основной теоремы Н.Н.Боголюбова* [2]. *Тогда автономное уравнение* (9) *имеет периодическое, периода* $T = \dfrac{2\pi(1-\varepsilon\mu_0)}{\omega}$ *решение*

$$x(t) = u\left(\frac{\omega t}{1-\varepsilon\mu_0}\right)\cos\frac{\omega t}{1-\varepsilon\mu_0} + v\left(\frac{\omega t}{1-\varepsilon\mu_0}\right)\sin\frac{\omega t}{1-\varepsilon\mu_0}.$$

В качестве примера рассмотрим автономную колебательную систему, которая описывается дифференциально-разностным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = \varepsilon\, x(t-2\pi n).$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $x = u(t)\cos t + v(t)\sin t$, аналогичный вид имеет решение порождающего уравнения. Для определения $u(t)$ и $v(t)$, следуя описанному алгоритму, получим следующую систему уравнений стандартного вида:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\varepsilon\left[u(t-2\pi n)\dfrac{\sin 2t}{2} + v(t-2\pi n)\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right]; \\ \dfrac{dv}{dt} = \varepsilon\left[u(t-2\pi n)\dfrac{1+\cos 2t}{2} + v(t-2\pi n)\dfrac{\sin 2t}{2}\right]. \end{cases}$$

Применяя к этой системе метод усреднения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонений аргумента:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\varepsilon}{2}v(t); \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{2}u(t), \end{cases}$$

решение которой имеет вид: $u(t) = C_1\cos\dfrac{\varepsilon}{2}t + C_2\sin\dfrac{\varepsilon}{2}t$, $v(t) = C_1\sin\dfrac{\varepsilon}{2}t - C_2\cos\dfrac{\varepsilon}{2}t$.

Таким образом, искомое периодическое решение имеет вид: $x(t) = C_1 \cos\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)t + C_2 \sin\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)t$.

Список литературы

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 216 с.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 182 с.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 501 с.
4. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1983. — 212 с.
5. *Хома Г.П.* Периодические решения волновых дифференциальных уравнений второго порядка. — Киев, 1986. — 44 с.

УДК 517.925.5

Б.Х.Жанбусинова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Мақалада ауытқитын аргументпен берілген, әр түрлі бірінші ретті сызықтық және сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер қарастырылған. Берілген теңдеудің периодтық шешімдерінің бар болу сұрағы зерттеліп. Ол шешімдердің шешілгіштігі жөніндегі теоремалар мен леммалар дәлелденген. Әр жағдай үшін шешімдер саны көрсетілген.

In article different linear and nonlinear differential equations of the first order with deviating argument are considered. The questions of existence of the periodic decisions theses equations are researched. Lemmas and theorems about their solubility are proved. Amount of the decisions is specified for each event.

Математическое моделирование явлений и процессов в биологии, химии, физике, астрономии приводит к необходимости исследования дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В частности, модель биологического сообщества «хищник–жертва» описывается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием и ставится задача нахождения периодического решения.

Исследуем вопрос существования периодических решений уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t-\Delta)\right), \tag{1}$$

где функция $f(t,x)$ — периодическая по t с периодом ω определена для всех $-\infty < t < +\infty$, Δ — постоянная величина, характеризующая отклонение аргумента, причем $0 \le \Delta \le \omega$.

Для исследования нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых аналогичны доказательствам лемм для обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонений аргумента [1].

Лемма 1. Если существует ограниченная при $t \ge 0$ $(t \le 0)$ полутраектория уравнения (1), то либо она является ω-периодическим решением, либо она асимптотически приближается к ω-периодическому решению.

Лемма 2. Если $f\left(t, x(t-\Delta)\right)$ монотонна по x при $a < x < b$, то уравнение (1) в полосе $-\infty < t < +\infty$, $a < x < b$ имеет не более одного периодического решения.

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка с отклонением аргумента

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x(t-\Delta) = q(t), \tag{2}$$

где $p(t), q(t) \in C(-\infty,+\infty)$, $p(t+\omega) = p(t)$, $q(t+\omega) = q(t)$, $\omega > 0$.