

10. Zamkov O.O., Tolstopjatenko A.V., Cheremnykh U.N. Mathematical methods in economy: the Textbook. — M.: The Moscow State University of M.V. Lomonosova, Publishing house, «DIS», 1997. — 368 p.
11. Germeyer U.B. Game with not opposite interests. — M.: The main edition of the physical and mathematical literature of publishing house. «NAUKA», 1976. — 328 p.
12. Ljus R.D., Rajfa H. Games and the decision. Introduction and the critical review: the Lane with English. — M.: Publishing house of the Foreign Literature, 1961. — 643 p.
13. Gren E. Statistic games and their application: the Lane with польск. — M.: Statistics., 1975. — 176 p.

УДК 532.5:519.8

Восстановление параметров нефтяного пласта для задачи многофазной фильтрации

Recovery of oil stratum parameters for multiphase filtration problem

Мукимбеков М.Ж.¹, Оралбекова Ж.О.²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы;

²Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы
(e-mail: m_mukim@fromru.com, oralbekova@bk.ru)

Қабат ұңғымаларының жеке нүктелерінде параметрлердің берілген өлшенген шамаларына сүйене отырып, қабат параметрлерін қалпына келтіру есебі үлкен қызығушылық танытып отыр. Мақалада мұнай қабатының параметрлерін табу есебі, дәлірек айтқанда, Маскет-Леверетт моделінің екіфазалық сүзілу есебі үшін өтімділік және қуыстық коэффициенттерін табу есебі қарастырылды. Қабаттың сүзілу сипаттамаларының мәліметтерін анықтауға арналған есептеу алгоритмі ұсынылды.

The important interest is the problems of stratum parameters recovery by given measurable values in separate points, in wells of stratum. In this work the problem of find of oil stratum parameters, namely coefficient of permeability and porosity for two-phase filtration of Masket-Leverett model is considered. Numerical algorithm for definition of given filtration characteristics is offered.

Постановка задачи. Для принятия решения по эффективной разработке месторождения необходимо знать состояние комплекса геолого-промысловых данных, к которым относятся такие параметры, как проницаемость, гидропроводность пласта. Поэтому большой интерес представляют задачи восстановления данных параметров исходя из их заданных измеренных величин в отдельных точках пласта, на скважинах пласта и задачи по обработке и анализу геолого-промысловых данных нефтяного месторождения [1–6].

Возросшие возможности вычислительной техники позволяют удешевить и ускорить проведение экспериментальных исследований и автоматизировать исследуемый процесс. Поэтому разработка эффективных алгоритмов решения задач восстановления параметров нефтяных залежей и задач по обработке и анализу геолого-промысловых данных, позволяющих значительно упростить инженерные экспериментальные исследования и повысить точность получаемых результатов, является актуальной на сегодняшний день.

Учитывая сказанное выше, в данной работе рассматриваются задачи по восстановлению геолого-физических параметров пласта, такие как проницаемость, пористость.

Приведем физическую постановку одномерной двухфазной задачи вытеснения нефти водой (модель Маскета-Леверетта).

Имеется нефтяной пласт длины l , на левом конце которого $x=0$ находится нагнетательная скважина, а на правом конце $x=l$ — добывающая скважина. На нагнетательной скважине закачиваем воду (рис.). Считаем две фазы — вода и нефть — несжимаемыми. Процесс описывает вытеснение нефти водой или, как говорят, происходит фронтальное вытеснение нефти водой из пласта. Будем считать давления нефти и воды неравными друг другу. Такая модель с учетом капиллярных сил называется моделью Маскета-Леверетта. Она лежит в основе гидродинамического анализа разработки

нефтяных месторождений [1]. Ставится обратная задача по восстановлению $k(x)$ — проницаемости и $m(x)$ — пористости нефтяного пласта соответственно. Система уравнений двухфазной модели в области $(0 < x < l, 0 < t \leq T)$ имеет следующий вид:

$$m \frac{\partial s_B}{\partial t} + \frac{\partial w_B}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$m \frac{\partial s_H}{\partial t} + \frac{\partial w_H}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где (1), (2) — законы сохранения массы для воды и нефти соответственно.



Рис. Нефтяной пласт

Скорости фильтрации воды и нефти (закон Дарси для каждой фазы) имеют следующие виды:

$$w_B = -k \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_B}{\partial x}, \quad (3)$$

$$w_H = -k \frac{f_H}{\mu_H} \frac{\partial p_H}{\partial x}, \quad (4)$$

$$s_B + s_H = 1, \quad (5)$$

$$p_H - p_B = p_k(s_B).$$

Обозначения следующие: k, m — проницаемость и пористость пласта. Неизвестными считаются функции проницаемости $k(x)$ и пористости $m(x)$ соответственно, которые нужно определить. Здесь p_H, s_B — соответственно давление нефти и насыщенность воды; $f_B = f_B(s_B), f_H = f_H(s_B)$ — относительные фазовые проницаемости, экспериментально измеряемые функции, μ_B, μ_H — соответственно вязкости воды и нефти — постоянные величины.

В дальнейшем для удобства вычислений преобразуем нашу систему, т.е., используя соотношение (5), сложим уравнение (1) и (2) и получим: $\frac{\partial}{\partial x}(w_B + w_H) = 0$. Таким образом, система принимает следующий вид в области $(0 < x < l, 0 < t \leq T)$:

$$m \frac{\partial s_B}{\partial t} + \frac{\partial w_B}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_B + w_H) = 0. \quad (7)$$

Введем следующие обозначения:

$$s = s_B, p = p_H, F(s) = \left(\frac{f_B}{\mu_B} + \frac{f_H}{\mu_H} \right), G(s) = -\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_k}{\partial s_B}$$

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial s_B} < 0 \right), I(s) = \frac{f_B}{\mu_B}, r = \frac{1}{m}.$$

Подставив соотношения (3), (4) в (6), (7), получаем, что система будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = r \frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) + r \frac{\partial}{\partial x} \left(kI(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (0 < x < l, 0 < t \leq T), \quad (8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(kF(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Начальное условие для насыщенности воды имеет следующий вид:

$$s|_{t=0} = s^0(x), \quad 0 < x < l.$$

На левой границе ставятся условия для насыщенности воды и давления нефти соответственно:

$$kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1(t), \quad kI(s) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta_1(t), \quad 0 < t \leq T.$$

На правой границе ставятся аналогичные условия:

$$kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_2(t), \quad kF(s) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = \beta_2(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Дополнительно ставятся условия для давления пласта и насыщенности воды:

$$p|_{x=l} = f_1(t), \quad s|_{x=0} = f_2(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Целевой функционал имеет следующий вид:

$$J(r, k) = \int_0^T [p(l, t, r, k) - f_1(t)]^2 dt + \int_0^T [s(0, t, r, k) - f_2(t)]^2 dt.$$

Неизвестными считаются функция проницаемости $k(x)$ и функция от коэффициента пористости $r(x)$, которые нужно определить.

В дальнейшем для получения градиента функционала нам нужно иметь сопряженную систему. Система уравнений для вариаций имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta s - r \frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial}{\partial x} \delta s \right) - r \frac{\partial}{\partial x} \left(kI(s) \frac{\partial}{\partial x} \delta p \right) &= r \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} + kG'(s) \delta s \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \\ &+ r \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta kI(s) \frac{\partial p}{\partial x} + kI'(s) \delta s \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \delta r \frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \delta r \frac{\partial}{\partial x} \left(kI(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[kF(s) \frac{\partial}{\partial x} \delta p \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial}{\partial x} \delta s \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta kF(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[kF'(s) \delta s \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(kG'(s) \delta s \frac{\partial s}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta s(x, 0, n, q) &= 0, \\ kI(s) \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= - \left(\delta kI(s) \frac{\partial p}{\partial x} + kI'(s) \delta s \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}, \\ kG(s) \frac{\partial(\delta s)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= - \left(\delta kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} + kG'(s) \delta s \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}, \\ kF(s) \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= - \left(\delta kF(s) \frac{\partial p}{\partial x} + kF'(s) \delta s \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=l}, \\ kG(s) \frac{\partial(\delta s)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= - \left(\delta kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} + kG'(s) \delta s \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_{x=l}. \end{aligned}$$

Сопряженная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + r q \left(G'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + I'(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \\ = r \frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - k \left(F'(s) \frac{\partial p}{\partial x} + G'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(kF(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = -r \frac{\partial}{\partial x} \left(kI(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (11)$$

Начальное условие имеет вид

$$\varphi|_{t=T} = 0.$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\theta|_{x=0} = 0, \left(k(F(s) - I(s)) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l} = -2[p(l, t, r, k) - f_1(t)],$$

$$\left(rkG(s) \left(1 - \frac{I(s)}{F(s)} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} = 2[s(0, t, r, k) - f_2(t)], \varphi|_{x=l} = 0.$$

Градиент функционала равен:

$$\nabla J_k = \int_0^T \left[r \left(G(s) \frac{\partial s}{\partial x} + I(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(F(s) \frac{\partial p}{\partial x} + G(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dt,$$

$$\nabla J_r = - \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(kI(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi \right] dt.$$

Численный алгоритм. Для расчетной области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ вводятся следующие неравномерные разностные сетки как по пространственной переменной, так и по временной переменной: $x_{i+1} = x_i + h_i$, $i = 0, \dots, N$, $t^0 = 0$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$, $n = 0, \dots, M$, $\Delta t^0 = \text{const}$ (Δt^0 — задаваемый начальный шаг).

Уравнения (8), (9) аппроксимируются следующими разностными уравнениями:

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\Delta t^n} = \frac{1}{h_i} r_i \left(a_{i+1/2}^{n+1} \left(\frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h_i} \right) - a_{i-1/2}^{n+1} \left(\frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h_{i-1}} \right) \right); \quad (12)$$

$$-\frac{1}{h_i} \left(b_{i+1/2}^{n+1} \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{h_i} \right) - b_{i-1/2}^{n+1} \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{h_{i-1}} \right) \right) = \frac{1}{h_i} \left(a_{i+1/2}^{n+1} \left(\frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h_i} \right) - a_{i-1/2}^{n+1} \left(\frac{s_i^{n+1} - s_{i-1}^{n+1}}{h_{i-1}} \right) \right). \quad (13)$$

Здесь $a_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (k_{i+1} G(s_{i+1}^{n+1}) + k_i G(s_i^{n+1}))$, $a_{i-1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (k_{i-1} G(s_{i-1}^{n+1}) + k_i G(s_i^{n+1}))$,

$$b_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (k_{i+1} F(s_{i+1}^{n+1}) + k_i F(s_i^{n+1})), \quad b_{i-1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (k_{i-1} F(s_{i-1}^{n+1}) + k_i F(s_i^{n+1})).$$

Сопряженную систему (10), (11) будем аппроксимировать следующим образом:

$$-\frac{(\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n)}{\Delta t^n} + \frac{1}{2} (g_i^n - |g_i^n|) \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h_i} \right) + \frac{1}{2} (g_i^n + |g_i^n|) \left(\frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h_{i-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{h_i} r_i \left(a_{i+1/2}^n \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h_i} \right) - a_{i-1/2}^n \left(\frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h_{i-1}} \right) \right) + \frac{1}{h_i} \left(a_{i+1/2}^n \left(\frac{\theta_{i+1}^n - \theta_i^n}{h_i} \right) - a_{i-1/2}^n \left(\frac{\theta_i^n - \theta_{i-1}^n}{h_{i-1}} \right) \right) - \quad (14)$$

$$-\frac{1}{2} (e_i^n - |e_i^n|) \left(\frac{\theta_{i+1}^n - \theta_i^n}{h_i} \right) - \frac{1}{2} (e_i^n + |e_i^n|) \left(\frac{\theta_i^n - \theta_{i-1}^n}{h_{i-1}} \right);$$

$$\frac{1}{h_i} \left(b_{i+1/2}^n \left(\frac{\theta_{i+1}^n - \theta_i^n}{h_i} \right) - b_{i-1/2}^n \left(\frac{\theta_i^n - \theta_{i-1}^n}{h_{i-1}} \right) \right) = -\frac{r_i}{h_i} \left(c_{i+1/2}^n \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h_i} \right) - c_{i-1/2}^n \left(\frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h_{i-1}} \right) \right). \quad (15)$$

Здесь $c_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (k_{i+1} I(s_{i+1}^n) + k_i I(s_i^n))$, $c_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} (k_{i-1} I(s_{i-1}^n) + k_i I(s_i^n))$,

$$g_i^n = \left(nq \left(G'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + I'(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right)_i^n, \quad e_i^n = \left(q \left(F'(s) \frac{\partial p}{\partial x} + G'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right)_i^n.$$

Системы уравнений (12)–(13) и (14)–(15) являются нелинейными, будем их решать одним из итерационных методов, предварительно линеаризуя нелинейные члены [7, 8]. Минимизирующиеся последовательности строятся следующим образом:

$$k^{(p+1)}(x) = k^{(p)}(x) - \alpha^n \nabla J_k^{(p)},$$

$$r^{(p+1)}(x) = r^{(p)}(x) - \beta^n \nabla J_r^{(p)},$$

где

$$\nabla J_k^{(p)} = \int_0^T \left[r \left(G(s) \frac{\partial s}{\partial x} + I(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(F(s) \frac{\partial p}{\partial x} + G(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dt,$$

$$\nabla J_r^{(p)} = - \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(kG(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(kI(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi \right] dt.$$

Здесь p — номер итерации, $p = 0, 1, 2, \dots$. Коэффициенты α^n, β^n для построения минимизирующихся последовательностей находятся одним из методов, приведенных в [9]. На основе предложенного алгоритма производится тестирование данных и анализ расчетов. Приводятся практические рекомендации для специалистов нефтяной отрасли.

References

1. *Aziz Kh., Settari E.* Mathematical modeling of stratum systems. — М.: Nedra, 1982. — 407 p.
2. *Konovalov A.N.* Problems of multiphase incompressible fluid filtration. — Novosibirsk, 1988. — 166 p.
3. *Zhumagulov B.T., Monahov V.N., Smagulov Sh.S.* Computer modeling in oil extraction processes. — Almaty: SRC «Gylym», 2002. — 307 p.
4. *Mukimbekov M.Zh.* Modeling of deposit development by secondary methods // Vestn. KazNU named after al-Farabi. Series of mathematics, mechanics, informatics. — 2004. — № 1 (40). — P. 140–146.
5. *Mukimbekov M.Zh.* About one two-dimensional problem in hydrocarbons development processes // Investigations on integral-differential equations. — 2008. — Part 39. — P. 217–226.
6. *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T.* Optimization methods for solving of coefficient inverse problems. — Novosibirsk, 2001. — 315 p.
7. *Samarski A.A.* Theory of difference schemes. — М.: Nauka, 1989. — 616 p.
8. *Anderson D., Tannehill J.* Computational hydromechanics and heat exchange. — М.: Mir, 1990. — 384 p.
9. *Vassiliev F.P.* Numerical methods of extremal problems decision. — М.: Nauka, 1980. — 520 p.