

## Әдебиеттер тізімі

- [1] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, №1. – С. 50-66.
- [2] Manat A.M., Orumbayeva N.T. On one approximate solution of a nonlocal boundary value problem for the Benjamin-Bon-Mahoney equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. №110(2) – P. 84-92. <https://doi.org/10.31489/2023m2/84-92>
- [3] Manat A.M., Orumbayeva N.T. On one solution of a nonlocal boundary value problem for a nonlinear partial differential equation of the third order // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2024. №121(1) – P. 65-75. <https://doi.org/10.26577/JMMCS202412117>

## ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мухтарбай Отелбаев<sup>1</sup>, Бакытбек Кошанов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

<sup>1</sup>E-mail: otelbaevm@mail.ru

<sup>2</sup>E-mail: koshanov@math.kz

### Аннотация.

В этой статье мы получаем две теоремы об априорных оценках решений нелинейных уравнений в конечномерном пространстве. Эти теоремы доказаны при выполнении некоторых условий, которые заимствованы из условий которым удовлетворяют конечномерные аппроксимации одного класса нелинейных начально-краевых задач.

### 1. Введение и о происхождении задачи

Многие задачи математической физики благодаря закону сохранения энергии позволяют доказать существование решения, которое удовлетворяет энергетической оценке. Энергетическая оценка в случае, когда количество пространственных переменных  $n$  не меньше чем 3, обычно не позволяет использовать теорию возмущений.

Решения, которые не позволяют (точнее, не могут позволить) использовать теорию возмущений, называются (обычно) "слабыми" решениями.

Возможность использовать теорию возмущений очень важна в задачах математической физики. Поэтому в теории дифференциальных уравнений сильно интересуются вопросами существования решения, позволяющего использовать теорию возмущений.

Решение уравнения, которое позволяет использовать теорию возмущений, математически называют "сильным" решением (не всегда).

Многие задачи математической физики могут быть записаны в "ограниченной записи" (в виде интегрального уравнения) обычно следующего вида

$$f(u) = u + L(u) = g, \quad (1)$$

где  $L(u)$  – нелинейная часть. Это уравнение изучается часто в метрике некоторого Банахова или Гильбертова пространства  $H$ .

При переходе к "ограниченной записи" энергетическая оценка, обычно выполняющаяся для задач математической физики, перейдет в априорную оценку следующего вида

$$\|G(u)\| \leq C \cdot \|u + L(u)\| = C\|g\|, \quad (2)$$

где  $C$  – постоянное число, не зависящее от  $u \in H$ , а  $G$  – вполне непрерывный оператор в  $H$ .

Априорная оценка (2) обычно не позволяет использовать теорию возмущений. Поэтому возникает необходимость получить оценку следующего вида

$$\|u\| \leq \varphi(\|f(u)\|), \quad (3)$$

где  $\varphi(\cdot)$  – непрерывная на  $[0, \infty)$  функция.

Наличие оценки вида (3), как правило, открывает возможность использования теории возмущений (при подходящем выборе пространства  $H$ ).

Весьма важной проблемой является проблема существования последовательности конечномерных аппроксимаций задачи (1) (точнее, аппроксимаций операции  $u + L(u)$ ):

$$f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_n(\cdot), \dots \quad (4)$$

рассматриваемых в пространствах

$$H_1, H_2, \dots, H_n, \dots, \dim H_n = n, \quad (5)$$

таких, что выполняются априорные оценки вида (2) и возможно получить аналогичную (3) оценку.

При этом подразумевается, что  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) является подпространством  $H$  и метрика  $H_n$  – есть метрика, индуцированная из метрики  $H$ .

Задача описания динамики несжимаемой жидкости, в силу своей теоретической и прикладной важности, привлекает внимание многих исследователей.

Данная работа посвящена к проблеме о существовании и гладкости решений уравнений математической физики [1]. В работах [2-4] приведены достаточно полный анализ современного состояния проблемы и обзор имеющейся литературы, предложены методы решения задачи. Работы [5-13] посвящены к исследованию разрешимости в целом уравнений математической физики, непрерывная зависимость решения параболического уравнения, а также гладкости решения.

Эта работа возникла в результате многочисленных попыток авторов решить проблему существования сильного решения уравнения математической физики.

В этой работе мы получаем две теоремы об априорных оценках решений нелинейных уравнений в конечномерном гильбертовом пространстве. Работа состоит из четырех пунктов. Первый пункт посвящен введению и происхождению задачи. Во втором пункте приводятся используемые обозначения и формулировка основных результатов. В третьем пункте приведена доказательство теоремы 1, который в пределе дает слабая разрешимость многих задач математической физики. В четвертом пункте доказывается теорема 2, который в пределе позволяет установить сильную разрешимость некоторых задач математической физики, допускающих теорию возмущений. Условия теорем такова, что можно

использовать при изучении некоторого класса начально-краевых задач для получения сильных априорных оценок при наличии слабых априорных оценок.

## 2. Используемые условия и формулировка результатов

Займемся выводом равномерных оценок для нелинейных задач в конечномерном пространстве. Рассматриваемые уравнения являются (как правило) аналогами конечномерных приближений уравнений математической физики, записанных в "ограниченной записи".

Всюду в этом разделе  $H$  – конечномерное действительное гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и нормой  $\| \cdot \|$ .

Нас будет интересовать уравнение следующего вида

$$u + L(u) = g \in H, \quad (6)$$

где  $L(\cdot)$  – нелинейное непрерывное преобразование,  $g$  – элемент пространства  $H$ . Решение  $u$  задачи (6) ищется в  $H$ .

Мы нацелены на такие конечномерные уравнения вида (6), которые есть конечномерные аппроксимации бесконечномерных задач вида (6) в бесконечномерном гильбертовом пространстве. При этом окажется весьма важным получение **не зависящих от номера аппроксимации оценок, позволяющих переходить к пределу**, и получить в пределе априорную оценку для решения бесконечномерной задачи. Бесконечномерные задачи вида (6), на которые мы нацелены в дальнейшем, являются, как правило, задачами математической физики, записанными в ограниченной форме.

Здесь и всюду далее  $f(u)$  будет означать операцию вида

$$f(u) := u + L(u). \quad (7)$$

Если  $\xi \in [0, +\infty)$  – параметр и вектор  $u(\xi)$  есть вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по параметру  $\xi$ , то будем предполагать, что также непрерывно дифференцируема и вектор-функция  $L(u(\xi))$ , а также возникающие в дальнейшем из  $L(u)$  и  $f(u)$  выражения.

Введем обозначения  $L_u$ :

$$(L(u(\xi)))_\xi = L_{u(\xi)} u_\xi(\xi). \quad (8)$$

Очевидно, что  $L_u$  (при каждом  $u \in H$ ) будет линейным оператором

$$L_u v = (L(u(\xi)))_{|_{u_\xi=v}}. \quad (9)$$

Имеем

$$(f(u(\xi)))_\xi = u_\xi + L_u u_\xi = (E + L_u) u_\xi.$$

В дальнейшем, если  $u_0, v_0 \in H$ , то вектор  $L_{u_0} v_0$  – понимаем следующим образом: берем непрерывно дифференцируемую вектор-функцию  $u(\xi)$  такую, что

$$u|_{\xi=0} = u_0, \quad u_\xi(\xi)|_{\xi=0} = v_0$$

и за  $L_{u_0} v_0$  принимаем вектор

$$L_{u_0} v_0 = (L(u(\xi)))_\xi |_{\xi=0}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем  $E$  – единичное преобразование. Обозначим

$$D_u = E + L_u, \quad D_u^* = E + L_u^*, \quad (10)$$

$$D_u^* f(u) = (E + L_u^*) f(u). \quad (11)$$

$$M_u a = \left( D_{u(\xi)}^* f(u(\xi)) \right)_{\xi} \Big|_{\substack{u(\xi) = u \\ u_{\xi}(\xi) = a}} = M_u u_{\xi} \Big|_{u_{\xi}=a} = M_u a. \quad (12)$$

Приведем используемые условия.

**Условие У1:** Для операторов  $L(\cdot)$ ,  $L_u$ ,  $L_u^*$ ,  $D_u$ ,  $D_u^*$  выполнены условия

$$\begin{cases} \|M_u - M_v\|_{H \rightarrow H} + \|L(u) - L(v)\| + \|L_u - L_v\|_{H \rightarrow H} + \\ + \|L_u^* - L_v^*\|_{H \rightarrow H} \leq \psi(\|u\|) \psi(\|v\|) \|u - v\|, \\ \|M_v u\| + \|D_v^* u\| + \|D_v u\| \leq \psi(\|v\|) \|u\|, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$ ,  $\psi(\cdot)$  – неубывающая на  $[0, \infty)$ , положительная непрерывная функция.

**Условие У2:** Существуют линейные обратимые операторы  $T$  и  $Q$  такие, что

$$\|T\| \leq C_T, \quad \|Q\| \leq C_T, \quad \|T^{-1}\| < \infty, \quad \|Q^{-1}\| < \infty, \quad (14)$$

и для любого  $u \in H$  выполнены неравенства

$$\langle Tu, L(u) \rangle \geq 0, \quad \langle Tu, u \rangle \geq \|Qu\|^2. \quad (15)$$

В (14)  $C_T$  – некоторое фиксированное постоянное число.

В дальнейшем через  $C$  или  $c$  (прописные или строчные, с индексами или без индексов) будем обозначать постоянные числа (вообще говоря, разные в разных местах), не зависящие от рядом стоящих множителей.

Справедлива

**Теорема 1.** Пусть выполнены условие У1 и условие У2. Тогда для любого  $g \in H$  задача

$$f(u) = g \quad (16)$$

имеет решение  $u \in H$ , удовлетворяющее оценке

$$\|Qu\|^2 \leq C_T \|g\|^2, \quad (17)$$

где  $Q$  – оператор из условия У2, а  $C_T$  – константа из условия У2.

Обозначениями преобразований  $f(u)$ ,  $L(u)$ , операторов  $L_u$ ,  $D_u$ ,  $M_u$  (определенных при каждом  $u \in H$ , (см. (6) - (11)) и их сопряженных  $L_u^*$ ,  $D_u^*$  и  $M_u$  будем пользоваться без оговорок.

Введем также обозначения:

$$J(u) = \|u\|^2 \exp \{ -\|f(u)\|^2 \}, \quad (18)$$

$$N(u) = D_u^* f(u) - \gamma(u) u. \quad (19)$$

Часто без оговорок используем обозначения (18) и (19), а также обозначения, возникшие в формулировках условий  $U1$  и  $U2$ , и обозначения, которые возникнут в формулировках ниже приведенных условий  $U3$  и  $U4$ .

**Условие  $U3$ :** Существует обратимый оператор  $G$ , такой, что

$$\|G\|_{H \rightarrow H} \leq C_0 < \infty, \quad \|G^{-1}\| < \infty \quad (20)$$

и для любого  $u \in H$  выполнено неравенство

$$\|Gu\|^2 \leq d_0 \|f(u)\|^2, \quad (21)$$

где  $d_0 > 0$  – постоянное число.

**Условие  $U4$ :** Если  $0 \neq u_0 \in H$ ,  $\gamma(u) > \|u\|^{-2}$  и  $N(u) = 0$ , то выполнены строгие неравенства

$$\inf_{\{a\}} \frac{\langle M_u P_u a, P_u a \rangle - \gamma(u) \|P_u a\|^2}{\|P_u a\|^2} < 0 < \sup_{\{a\}} \frac{\langle M_u P_u a, P_u a \rangle - \gamma(u) \|P_u a\|^2}{\|P_u a\|^2}, \quad (22)$$

где  $P_u a$  – ортогональный проектор.

Справедлива

**Теорема 2.** Если выполнены условия  $U1$ ,  $U3$  и  $U4$ , то для любого  $u \in H$  выполнена априорная оценка:

$$\|u\|^2 \leq C \exp \{ \|f(u)\|^2 \}. \quad (23)$$

Отметим, что оценка (23) выполняется, если соблюдаются условия  $U1$ ,  $U3$  и ниже следующее

**Условие  $U5$ :** Существуют постоянные числа  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $m$  и самосопряженный оператор  $T$ , такие, что если  $\|u\| \geq 1$ , то выполняются неравенства

$$\|L(u)\| \geq c_0 \|Tu\|^m, \quad \|u\| \leq c_1 \|u\|^m. \quad (24)$$

**Замечание 1.** Если выполняются условия теоремы 1, то выполняется условие  $U3$ . Это вытекает из теоремы 1.

### 3. Доказательство теоремы 1

Пути доказательства теорем, содержания которых подобны утверждению теоремы 1, хорошо известны, и мы могли бы ограничиться ссылкой на них. Однако ради полноты излагаемых результатов мы снабжаем теорему 1 доказательством.

Для доказательства используем один общеизвестный прием (в удобной для нас форме).

Пусть  $g \in H$ . Обозначим через  $M(g)$  множество векторов

$$M(g) = \{u \in H : \langle Tu, u \rangle \leq 16 \langle Tg, g \rangle\}, \quad (25)$$

где  $T$  – оператор из условия  $U2$ .

Предположим, что уравнение  $u + L(u) = g$  не имеет решения  $u \in M(g)$ . Определим преобразование

$$F(u) = - \frac{u + L(u) - g}{\sqrt{\langle T(u + L(u) - g), u + L(u) - g \rangle}} 4\sqrt{\langle Tg, g \rangle}. \quad (26)$$

Так как уравнение  $u + L(u) = g$  не имеет решения, то в силу условия У2 (см. (15)), преобразование  $F(\cdot)$  непрерывно. Легко видеть, что это преобразование переводит множество  $M(g)$  в себя. Поэтому, в силу теоремы Браудера о неподвижной точке и конечномерности  $H$ , преобразование  $F(\cdot)$  имеет неподвижную точку  $u_0 \in M(g)$ , то есть

$$F(u_0) = u_0. \quad (27)$$

Поддействуем на (27) оператором  $T$ , а затем полученное равенство скалярно умножим на  $u_0 + L(u_0) - g$ . Тогда, используя (26), получаем

$$\begin{aligned} -A &:= -4\sqrt{\langle Tg, g \rangle} \sqrt{\langle T(u_0 + L(u_0) - g), u_0 + L(u_0) - g \rangle} = \\ &= \langle Tu_0, u_0 + L(u_0) - g \rangle \geq \langle Tu_0, u_0 \rangle - \langle Tu_0, g \rangle = \\ &= \langle Tu_0, u_0 \rangle - \frac{1}{2} (\langle Tu_0, g \rangle + \langle u_0, T^*g \rangle). \end{aligned} \quad (28)$$

При выводе (28) в предпоследнем переходе использовано (15) из условия У2.

Так как согласно условию У2 неравенство  $\langle Tv, v \rangle \geq \|Qv\|^2$  выполнено для любого  $v \in H$  и оператор  $Q$  обратим, то величину  $\langle Tu_0, u_0 \rangle$  можно принять за квадрат нормы вектора  $u_0$ , а величину  $\frac{1}{2} (\langle Tu_0, g \rangle + \langle u_0, T^*g \rangle)$  – за (согласованное с этой нормой) скалярное произведение векторов  $u_0$  и  $g$  в некотором действительном гильбертовом пространстве. Поэтому можно использовать известное неравенство Коши и получим неравенство

$$-A \geq \langle Tu_0, u_0 \rangle - (\varepsilon^{-1} \langle Tu_0, u_0 \rangle + \varepsilon \langle Tg, g \rangle) = \langle Tu_0, u_0 \rangle (1 - \varepsilon^{-1}) - \varepsilon \langle Tg, g \rangle. \quad (29)$$

Из (27) и (26) имеем

$$\langle Tu_0, u_0 \rangle = \langle TF(u_0), F(u_0) \rangle = 16 \langle Tg, g \rangle.$$

Отсюда и из (29) получаем

$$-A \geq [(1 - \varepsilon^{-1})16 - \varepsilon] \langle Tg, g \rangle.$$

Выбрав здесь  $\varepsilon = 2$ , получаем  $-A \geq 6 \langle Tg, g \rangle$ .

Так как левая часть неравенства есть отрицательная величина, то оно противоречит неравенству (15) из условия У2. Это доказывает, что уравнение  $u + Tu = g$  имеет решение  $u \in M(g)$ .

Для решения уравнения  $u + L(u) = g$ , умножая его скалярно на  $Tu$ , имеем

$$\langle Tu, u \rangle + \langle Tu, L(u) \rangle = \langle Tu, g \rangle = \frac{1}{2} (\langle Tu, g \rangle + \langle u, T^*g \rangle).$$

Здесь справа стоит скалярное произведение векторов  $Tu$  и  $g$  в некотором гильбертовом пространстве. Применяя известное неравенство Коши и учитывая первое неравенство из (15) условия У2, получаем:

$$\langle Tu, u \rangle \leq (\langle Tu, u \rangle)^{1/2} (\langle Tg, g \rangle)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\langle Tu, u \rangle \leq \langle Tg, g \rangle \leq \|Tg\| \|g\| \leq C_T \|g\|^2,$$

где  $C_T$  – константа из условия У2.

Теперь из второго неравенства (15) условия У2 получаем

$$\|Qu\|^2 \leq C_T \|g\|^2.$$

Теорема 1 доказана.

**Замечание 2.** Теорема 1 позволяет доказать существования "слабого" решения некоторых задач математической физики. Для доказательства существования "сильного" решения, позволяющего использовать теорию возмущений для некоторых задач математической физики, нам нужна ещё одна конечномерная теорема, которая будет доказана при выполнении условий У1, У3 и У4.

Подробное доказательство теоремы 2 приведен в нашей статье в Казахском Математическом Журнале [12].

Работа выполнена при поддержке грантов BR 20281002 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

## Список литературы

- [1] Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation [http://claymath.org/millennium/Navier-Stokes\\_Equations/](http://claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/). - Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. 1–5.
- [2] Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса // Математический журнал (Алматы). - 2013. - Т. 13, 4 (50). - С. 5–104. [http://www.math.kz/images/journal/2013-4/Otelbaev\\_N-S\\_21\\_12\\_2013.pdf](http://www.math.kz/images/journal/2013-4/Otelbaev_N-S_21_12_2013.pdf)
- [3] Ладыженская О.А. Решение «в целом» краевой задачи Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных // Доклады АН СССР. - 1958. - Т. 123, 3. - С. 427–429.
- [4] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость // Успехи математических наук. - 2003. - Т. 58, 2 (350). - С. 45–78.
- [5] Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodinamischen Grundgleichungen // Math. Nachr. - 1951. - V. 4. - P. 213–231.
- [6] Отелбаев М. Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье-Стокса // Математические заметки. - 2011. - Т. 89, 5. - С. 771–779.
- [7] Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. II // Сибирский математический журнал. - 2008. - Т. 49, 4. - С. 855–864.
- [8] Отелбаев М. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Труды математического института им. В.А. Стеклова. - 2008. - Т. 260, 1. - С. 202–212.
- [9] Отелбаев М., Жапсарбаева Л.К. Непрерывная зависимость решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве от параметров и от начальных данных // Дифференциальные уравнения. - 2009. - Т. 45, 6. - С. 818–849.
- [10] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. - М. - Мир. - 1972. - 586 с.