

О.А.Кан, С.К.Жұмағұлова

**Автоматтандырылған оқыту жүйелерін құрудың әдістемелік аспектілері**

Мақалада автоматтандырылған оқыту жүйелерін (АОЖ) құрудың әдістемелік аспектілері қарастырылған, оқу материалын меңгеру деңгейлеріне талдау жасалған, автоматтандырылған оқыту жүйелерінде сұрақтарды құру және жауаптарды енгізу тәсілдері ұсынылған. Қазіргі кездегі АОЖ-дың даму болашағы көрсетілген. Оқу материалын меңгеру деңгейлері берілген. Сондай-ақ сұрақтарды және жауаптарды бағдарламалық іске асыру тәсілі, санау жүйелері мен логикалық операциялар бойынша сұрақтарды бағдарламалық қолданудың мысалдары келтірілген.

O.A.Kan, S.K.Gumagulova

**Methodical aspects of creation of the automated training systems**

In article methodical aspects of creation of ATS are considered, the analysis of levels of assimilation of a training material is carried out, ways of formation of questions and input of answers which are expedient for using in the automated training systems are offered. Prospects of development of ATS are allocated now. Levels of extent of assimilation of a training material are presented. The way of program realization of questions and verification of answers is offered. Examples of program realization of questions on notations and logic operations are presented.

УДК 338.26.015.001.26

Р.С.Каренов

*Қарағандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: karenov\_r@inbox.ru)***Линейное программирование как специфический метод исследования операций для решения технико-экономических задач на отыскание оптимума**

Проанализированы сущность и значение линейного программирования как метода решения задачи оптимального распределения имеющихся ресурсов. Раскрыто содержание основной производственной задачи, предложенной академиком Л.В. Канторовичем. Дана общая характеристика методов решения задач линейного программирования. Выделены роль и значение фундаментальных экономико-математических моделей линейного программирования, используемых в практике планирования, прогнозирования и управления производством. Акцентировано особое внимание на симплексном методе как главном способе решения задач линейного программирования. Предложен методический подход для решения задачи об использовании минеральных удобрений на сельскохозяйственных предприятиях.

*Ключевые слова:* линейное программирование, оптимальное распределение, экономико-математические модели, симплексный метод, задачи планирования.

*Сущность линейного программирования как метода решения задачи оптимального распределения имеющихся ресурсов*

Классический путь определения наибольших или наименьших значений приравниванием первых частных производных нулю при зависимости функции от нескольких переменных весьма сложен.

Линейное программирование дает метод отыскания оптимума для широкого класса функций, зависящих от многих переменных, подчиняющихся определенным ограничивающим условиям. Оно является наиболее известным и одним из наиболее широко используемых инструментов management science. Это математический метод решения задачи оптимального распределения имеющихся ресурсов (или денег, или материалов, или времени) для достижения определенной цели (наибольшего дохода или наименьших издержек) [1–7].

Пусть, например, отдел маркетинга на основе анализа рынка предлагает фирме выпустить выгодные для реализации новые виды продуктов. Ясно, что каждый из новых продуктов будет вносить в доход фирмы свой вклад, а его изготовление потребует своей доли в расходе имеющихся в наличии ресурсов. Кроме того, следует учесть, что для одновременного производства всех новых продуктов наличных ресурсов, как правило, оказывается недостаточно.

У руководства фирмы возникает естественный вопрос: какие из этих новых видов продуктов и в каком количестве следует производить? Для подготовки содержательного ответа на вопрос: производство какого количества новых продуктов способно принести наибольший доход (в рамках имеющихся ресурсов) — во многих случаях может быть использовано линейное программирование.

Вообще на сегодняшний день линейное программирование (ЛП) — это количественный метод, широко используемый менеджерами предприятий и фирм при принятии разнообразных решений. В целом метод ЛП можно использовать при решении одной из трех следующих проблем.

1. При определении комбинации товаров или услуг, производство или оказание которых принесет компании максимальную прибыль, учитывая ряд ограничивающих условий. Скажем, перед нами стоит следующая проблема: можно производить (или оказывать) товары (услуги) А, В, С, но мы не знаем, какая комбинация этих товаров (услуг) будет наиболее прибыльная. Чтобы найти правильный ответ, следует использовать метод ЛП.

2. При определении транспортной стратегии перемещения людей и товаров с наименьшими издержками. Когда есть несколько возможностей транспортировки товаров, сырья или людей (железнодорожным, воздушным и автотранспортом), нужно использовать метод ЛП, чтобы принять правильное решение.

3. При определении комбинации заданий для рабочих, которые максимизируют эффективность их работы в условиях определенных ограничений. Например, менеджер по реализации может использовать ЛП для определения «оптимального» уровня использования внешних каналов реализации и внутренних, т.е. с помощью телефонных контактов.

Для того чтобы использовать ЛП, необходимо:

- представить альтернативы решения в виде математических переменных;
- определить основные ограничения (ресурсы, спрос и т.д.) и представить в виде математических выражений.

Программирование в данном термине имеет смысл планирования. Линейное означает, что ищется экстремум линейной целевой функции при линейных ограничениях (линейных уравнениях и линейных неравенствах).

Тем самым линейное программирование имеет весьма мало общего с программированием, используемым в computer science. Вместе с тем вычислительные средства играют существенную роль в повышении эффективности его приложений. Дело в том, что многие реальные задачи линейного программирования содержат сотни неизвестных, уравнений и неравенств, и их невозможно успешно решать без современных быстродействующих компьютеров.

#### *Основная производственная задача академика Л.В.Канторовича*

Идеи линейного программирования были высказаны впервые российским математиком Л.В.Канторовичем в 1939 г. в работе «Математические методы организации и планирования производства». Однако долгое время эта работа оставалась малоизвестной.

При разработке одной из первых математических моделей Л.В.Канторович исходил из следующего. Пусть имеется некий производственный процесс, предназначенный для выпуска  $n$  видов продукции. По каждому из видов продукции заданы ограничения на объем выпуска и нормы расхода привлекаемых ресурсов. Поставка продукции потребителю осуществляется комплектами, и поэтому требуется сформировать плановый ассортимент выпуска продукции, обеспечивающий максимальное число комплектов поставки продукции.

Формализуя математическую постановку задачи, введем следующие ограничения:

$$x(i) \geq 0,$$

$$a(s,1)x(1) + a(s,2)x(2) + \dots + a(s,n)x(n) \leq V(s).$$

Оптимизационная оценка имеет вид

$$\max \min \left( \frac{x(i)}{k(i)} \right).$$

Здесь  $k(i)$  — количество единиц  $i$ -го продукта в комплекте.

Решается такая задача методом линейного программирования, который фактически и появился как алгоритм решения этой математической задачи в 1939 г.

В 1947 г. примерно те же идеи были высказаны американским математиком Дж. Данцигом. После этого появилось большое количество работ, посвященных проблемам выбора оптимальных решений, и не только ввиду их исключительной важности, но и потому, что к этому времени относится развитие вычислительных машин, без которых невозможно было бы успешно решать возникающие при этом сложные математические задачи.

#### *Общая характеристика методов решения задач линейного программирования*

Можно выделить следующие основные возможные результаты решения задачи линейного программирования:

1. Система неравенств (уравнений) совместна, и область, определяемая ею, ограничена. В этом случае задача разрешима и имеет оптимальное решение.
2. Максимальное (минимальное) значение целевой функции достигается при многих вариантах программы (случай множества оптимальных планов).
3. Система неравенств совместна, но область, определяемая ею, не ограничена. Тогда существуют решения со сколь угодно большими значениями переменных, при этом и целевая функция может иметь сколь угодно большое значение ( $f$  не ограничено). Для реальных экономических задач при их правильной постановке такой случай невозможен, так как это означает неограниченное увеличение функции пользы, т.е. при формулировке задачи упущено какое-то ограничение.
4. Система неравенств противоречива, или не существует набора чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющих всем условиям задачи, т.е. задача не имеет ни одного решения, что в экономической интерпретации означает невозможность данного экономического процесса при указанных условиях.

Определенный интерес представляет общая характеристика методов решения задач линейного программирования. Они различаются не только по принципам расчета оптимального плана, но и по характеру решаемых задач, по эффективности в вычислительном отношении. Общий принцип решения заключается в поэтапном, последовательном переходе от исходного опорного плана к оптимальному. При этом используются в основном два различных способа отыскания оптимального плана.

Первый способ состоит в том, что вначале получают допустимое решение (удовлетворяющее всем ограничениям), но не обязательно оптимальное. Оптимальность достигается за конечное число шагов путем последовательного улучшения исходного решения.

При втором способе получают с самого начала условно оптимальный план, который обеспечивает максимум (минимум) целевой функции, но может не быть допустимым и становится допустимым вариантом плана лишь после определенных преобразований.

По характеру решаемых задач методы линейного программирования можно разделить на следующие группы:

1. Метод последовательного улучшения планов применим к любым задачам линейного программирования и является общим универсальным методом. Среди методов линейного программирования, которые позволяют получать оптимальное решение, последовательно улучшая план, следует выделить два универсальных метода — метод разрешающих множителей Л.В.Канторовича и симплексный метод, предложенный Данцигом. Универсальные методы линейного программирования позволяют решать разнообразные экономические задачи — в этом их большое достоинство. Но они имеют и недостаток, который заключается в громоздкости расчетов.

2. На основе общих методов линейного программирования для отдельных типов задач были разработаны специальные методы линейного программирования. В частности, для решения так называемых транспортных задач были разработаны специальные методы линейного

программирования, которые позволяют получать оптимальный вариант, последовательно улучшая план. К их числу можно отнести распределительный и модифицированный распределительный методы, разработанные американскими учеными.

В бывшем Советском Союзе строгое математическое решение транспортной задачи значительно раньше и впервые дал академик Л.В.Канторович, который в 1940 г. опубликовал разработанный им метод потенциалов, почти полностью совпадающий с модифицированным распределительным методом американских авторов. В настоящее время метод потенциалов и модифицированный распределительный метод рассматриваются как единый метод линейного программирования.

Наряду с этим, транспортные задачи могут решаться методами линейного программирования, в которых оптимальное решение определяется путем приближения к условно-оптимальным значениям. К ним можно отнести метод условно-оптимальных планов, разработанный А.Л.Лурье, или метод разрешающих слагаемых, а также метод дифференциальных рент, в котором содержатся два алгоритма: метод разрешающих слагаемых А.Л.Лурье и алгоритм дифференциальных рент А.Л.Брудно. Получение оптимального варианта путем приближения к условно-оптимальным планам иначе называется методом последовательного сокращения невязок.

Основная особенность метода условно-оптимальных планов состоит в том, что первоначальный вариант плана не удовлетворяет полностью заданным ограничениям, но может рассматриваться как условно-оптимальный вариант плана. Такой вариант плана мог бы обеспечить минимальное или максимальное значение целевой функции, если бы связанные с этим вариантом невязки или отклонения от заданных ограничений были бы признаны допустимыми. Каждый следующий вариант плана содержит уже меньшие по величине невязки, или равные предыдущему плану, но не большие. Однако такой план остается условно-оптимальным. Через некоторое конечное число шагов, или итераций, получаем вариант плана, в котором невязки ликвидированы, а целевая функция имеет оптимальное значение.

3. Все перечисленные выше методы линейного программирования являются точными методами, дающими в конечном результате оптимальное решение. Наряду с этими методами существуют приближенные методы линейного программирования, которые не дают оптимального решения, но с достаточной степенью приближают к оптимальному решению. Такие методы иначе называются итеративными методами линейного программирования. К их числу можно отнести индексный метод линейного программирования, метод аппроксимации Фогеля, позволяющий получать улучшенный первоначальный вариант плана, и ряд других методов.

4. Среди наглядных методов линейного программирования необходимо отметить графоаналитический метод, который дает возможность решать задачи с числом переменных не выше трех. Он используется при составлении программ по загрузке оборудования, решении транспортных задач для определения наименьших пробегов транспорта, грузооборота и т.д.

В настоящее время при решении различных технико-экономических задач многие методы линейного программирования усовершенствованы и позволяют решать сложные задачи с учетом различных ограничений.

*Фундаментальные экономико-математические модели, используемые в практике планирования, прогнозирования и управления производством*

На сегодняшний день в практике планирования, прогнозирования и управления производством применяются следующие фундаментальные экономико-математические модели линейного программирования:

1. Наиболее распространенной математической моделью, используемой в практике планирования промышленного производства, является экономико-математическая модель линейного программирования транспортного типа.

Сущность классической транспортной задачи состоит в том, чтобы найти наиболее выгодный план перевозок однородного или взаимозаменяемых продуктов из пунктов отправления в пункты потребления. Пунктами отправления (поставщиками) обычно являются предприятия, производящие определенный вид продукции, пунктами потребления служат предприятия, использующие этот вид продукции.

Экономическая постановка транспортной задачи состоит в следующем. Нам известно: сколько груза (в тоннах) имеется в каждом пункте отправления и сколько его требуется в каждом пункте потребления, расстояние (в километрах) от каждого поставщика до каждого потребителя. Требуется определить, сколько тонн груза и в какие пункты потребления надо перевезти от каждого поставщика с тем, чтобы спрос в продукте пунктов назначения был удовлетворен, а общий объем транспортной работы в тонно-километрах (грузооборот) был минимальным.

Рассмотрим математическую формулировку транспортной задачи.

Пусть мы имеем  $m$  поставщиков  $(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m)$  продукции и  $n$  потребителей  $(B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n)$ ,  $a_i$  — число единиц продукта в  $i$ -том пункте отправления.

Единицей измерения продукта могут быть тонны, штуки, вагоны и др.;  $b_j$  — спрос в продукте  $j$ -того пункта потребления;  $c_{ij}$  — транспортные издержки (расстояние) на перевозку единицы продукта от  $i$ -того поставщика в  $j$ -тый пункт потребления.

Показателем  $c_{ij}$  может быть себестоимость перевозок 1 т продукта, расстояние между пунктами отправления и пунктами назначения, время, затрачиваемое на перевозку 1 т продукта от поставщика в пункт потребления.

$x_{ij}$  — количество единиц продукта, перевозимое из  $i$ -того пункта отправления в  $j$ -тый пункт потребления.

В принятых обозначениях рассматриваемую задачу можно представить в виде таблицы 1.

Т а б л и ц а 1

**Представление транспортной задачи линейного программирования в принятых обозначениях**

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос					
		$B_1$	...	...	$B_j$	...	$B_n$
		$b_1$	...	...	$b_j$	...	$b_n$
$A_1$	$a_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	...	...	$c_{1j}$ $x_{1j}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$
$A_i$	$a_i$	$c_{i1}$ $x_{i1}$	...	...	$c_{ij}$ $x_{ij}$	...	$c_{in}$ $x_{in}$
$A_m$	$a_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	...	...	$c_{mj}$ $x_{mj}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$

Элементы  $c_{ij}$  называются показателем критерия оптимальности, совокупность всех  $x_{ij}$  — распределение поставок, объем продукта, имеющийся у каждого поставщика, его мощность —  $a_i$ .

Учитывая принятые обозначения, условие полного удовлетворения спроса в продукте всех пунктов потребления можно записать в виде уравнения

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Продукт, имеющийся у поставщиков, должен быть вывезен полностью потребителям. Это условие запишется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{2}$$

Из приведенных условий (1) и (2) вытекает, что сумма мощностей поставщиков равняется спросу всех пунктов потребления:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \tag{3}$$

Оптимальный вариант плана поставок, характеризующийся минимальным грузооборотом, можно записать уравнением целевой функции:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (4)$$

Не вызывает сомнения, что должно быть обязательно требование неотрицательности мощностей пунктов отправления и спросов потребителей:

$$a_i \geq 0; \quad (5)$$

$$b_j \geq 0. \quad (6)$$

Обратные перевозки продукта от потребителей к поставщикам исключаются. Это условие запишется ограничением:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Экономико-математическая модель транспортной задачи называется закрытой, если она записывается условиями (1)–(7).

Во многих транспортных задачах условие (3) может быть нарушено. В этом случае сумма мощностей поставщиков не равна суммарному спросу всех потребителей. Условие (3) может выглядеть в виде

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j, \quad (8)$$

а ограничение запишется как

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} < a_i. \quad (9)$$

Модель транспортной задачи, имеющая условие (8), называется открытой. Всегда открытую модель транспортной задачи можно свести к закрытой путем введения фиктивного потребителя с объемом потребления продукта, равным

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j,$$

или фиктивного поставщика:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i. \quad (10)$$

При планировании перевозок часто приходится учитывать ограниченные пропускные способности по разным маршрутам, по которым можно провезти не более определенного количества продукта. Эти ограничения записываются в виде неравенства:

$$0 \leq x_{ij} \leq a_{ij}, \quad (11)$$

где  $a_{ij}$  — предельное число единиц продукта, перевозимое по коммуникации  $a_i b_j$  за время, оговоренное в условиях задачи.

Существуют другие модификации транспортной задачи, которые сводятся к классической модели путем различных преобразований.

Экономико-математическая модель, описывающая несколько экономических процессов, называется фундаментальной моделью. Поэтому модель транспортной задачи линейного программирования является фундаментальной экономико-математической моделью и решается на ЭВМ по стандартной программе любого специального или универсального метода линейного программирования.

2. Следующей широко используемой фундаментальной моделью является экономико-математическая модель смеси (диеты).

Ставится условие: дневная диета должна содержать  $m$  различных питательных веществ соответственно в количествах не менее  $b_i$  единиц,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Имеется  $n$  различных продуктов.

Пусть  $a_{ij}$  — количество единиц  $i$ -го питательного вещества в единице  $j$ -го продукта,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $c_j$  — стоимость единицы  $j$ -го продукта, имеющегося в наличии. Определить такую диету, которая удовлетворяла бы минимальной дневной потребности в каждом питательном веществе при наименьшей общей стоимости используемых продуктов.

Если обозначить через  $x_j$  количество единиц  $j$ -го продукта, входящего в диету, то задача математически формулируется следующим образом. Найти минимум линейной формы:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i,$$

$$0 \leq x \leq d_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим конкретный пример. Предприятие собирается производить сплав, содержащий 30 % металла  $M_1$ , 30 % металла  $M_2$  и 40 % металла  $M_3$ . Можно купить сплавы  $A, B, \dots, E$ , составы и цены которых приведены в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

Исходные данные для решения задачи о смеси (диете)

Виды металла	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	Требуемый сплав
$M_1$	0,1	0,1	0,4	0,6	0,3	0,3
$M_2$	0,1	0,3	0,5	0,3	0,3	0,3
$M_3$	0,8	0,6	0,1	0,1	0,4	0,4
Стоимость 1 кг, тыс. тенге	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	

В данном случае имеется неоднозначность выбора решения. Можно купить сплав  $E$  по стоимости 7,6, а также купить  $\frac{1}{4}(A + B + C + D)$  по стоимости 5,05. Существует ли лучшее решение, т.е. такой набор металлов, когда мы получим требуемый сплав при минимальной стоимости?

Обозначим через  $x_1$  количество единиц  $A$  в 1 кг купленной смеси,  $x_2$  — количество единиц  $B$  в 1 кг купленной смеси и т.д. Очевидно,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \tag{12}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,4x_3 + 0,6x_4 + 0,3x_5 &= 0,3; \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 &= 0,3; \\ 0,8x_1 + 0,6x_2 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 0,4x_5 &= 0,4; \end{aligned} \tag{13}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \tag{14}$$

Требуется найти решение  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , удовлетворяющее ограничениям (12)–(14) и минимизирующее линейную функцию

$$Z = 4,1x_1 + 4,3x_2 + 5,8x_3 + 6x_4 + 7,6x_5.$$

Данная модель используется в молочной промышленности при составлении смесей мороженого, плавяных сыров, сырково-творожных изделий, в пищевой промышленности — при составлении смеси кремов, конфет и др. С небольшим изменением ограничений эта модель используется в химической промышленности, при составлении различных смесей в металлургическом производстве, при составлении шихты чугуна, в нефтеперерабатывающей промышленности при составлении смесей бензинов, в сельскохозяйственном производстве при составлении рационов кормления животных, птицы, комбикормов.

Данная модель легко решается на ЭВМ по стандартной программе любого универсального метода линейного программирования.

3. Фундаментальная экономико-математическая модель линейного программирования — математическая модель решения задачи о станках (задача Л.В.Канторовича).

На предприятии выпускаемое изделие состоит из двух металлических деталей, обработка которых может быть выполнена на различных станках: фрезерных, револьверных или автоматических револьверных. Требуется закрепить станки за деталями так, чтобы получать в час максимальное число изделий.

Чтобы в данном случае сформулировать задачу, очевидно, требуется информация о количестве станков, их производительности по каждой из деталей в отдельности. Не всегда такая информация

может быть в наличии. И тогда, применяя методы статистики, путем обследования, ее необходимо получить.

В таблице 3 представлена требуемая информация для решения сформулированной задачи.

Т а б л и ц а 3

Исходные данные для решения задачи о станках

Типы станков	Число станков (шт.)	Производительность станка (дет./ч)	
		Деталь № 1	Деталь № 2
Фрезерный	3	10	20
Револьверный	3	20	30
Автоматический револьверный	1	30	80

Прежде чем составить модель, следует понять, что является допустимым действием и на какие элементарные действия его можно расчленить. В данном случае действие — план распределения, характеризуемый количеством станков (каждого типа), закрепленных за каждой из деталей. В соответствии с этим введем совокупность неизвестных  $x = \{x_{ij}, i = 1, 2, 3; j = 1, 2\}$ , где  $x_{ij}$  — количество станков  $i$ -го вида, выпускающих деталь  $j$ . Совокупность переменных  $x$  полностью характеризует действие. При каких условиях переменные  $x_{ij}$  будут отвечать допустимому действию, т.е. плану, согласующемуся с заданными ресурсами (станками), с требованием комплектации (деталей № 1 и 2 должно быть равное количество)? Очевидно,

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &\leq 3, \\ x_{21} + x_{22} &\leq 3, \\ x_{31} + x_{32} &\leq 1 \end{aligned} \quad (15)$$

(ограничения по станкам),

$$10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{31} = 20x_{12} + 30x_{22} + 80x_{32} \quad (16)$$

(требование комплектности).

Кроме того, переменные  $x_{ij}$  должны быть неотрицательными, т.е.

$$x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad x_{21} \geq 0, \quad x_{22} \geq 0, \quad x_{31} \geq 0, \quad x_{32} \geq 0, \quad (17)$$

но не обязательно целыми числами. Если, например,  $x_{21} = 2\frac{4}{5}$ , то это значит, что два револьверных станка выпускают детали № 1, а третий станок занят выпуском этой детали  $\frac{4}{5}$  часа.

Цель планирования состоит в максимизации числа полных устройств, т.е. требуется найти такие переменные  $x_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2$ , которые удовлетворяют ограничениям (15)–(17) и максимизируют линейную функцию

$$f(x) = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{31}. \quad (18)$$

4. К фундаментальной экономико-математической модели линейного программирования можно отнести также решение задачи об использовании мощностей по этой модели.

Предположим, что предприятие должно за время  $T$  выполнить или, если это возможно, перевыполнить план производства двух видов изделий  $P_1$  и  $P_2$ . Для производства каждого вида изделий может быть использовано оборудование групп  $A_1$  и  $A_2$ . Производительность оборудования этих групп различна и определяется величиной  $a_{ij}$ , где  $i$  — индекс, отмечающий вид оборудования,  $j$  — индекс, отмечающий вид продукции. Стоимость единицы времени работы оборудования при изготовлении одной единицы продукции выражается величиной  $b_{ij}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2$ ).

Требуется составить оптимальный план работы групп оборудования, при котором будет выполнен план выпуска продукции с минимальной себестоимостью и в заданный срок. Плановое количество изделия  $P_1$  составляет  $N_1$  штук, а  $P_2$  —  $N_2$  штук. Характеристики процесса производства изделий с помощью оборудования различных групп представлены в таблице 4.

**Характеристики процесса производства изделий с помощью оборудования различных групп**

Группа оборудования	Производительность оборудования		Цена единицы времени работы оборудования	
	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$b_{11}$	$b_{12}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_{21}$	$b_{22}$

Введем следующие переменные:  $x_{11}$  — количество единиц машинного времени, в течение которого первая группа оборудования будет производить первый вид изделий;  $x_{12}$  — количество единиц машинного времени, в течение которого первая группа оборудования будет производить второй вид изделий. Переменные  $x_{21}, x_{22}$  имеют аналогичный смысл.

Составим систему ограничений, учитывающую плановый период  $T$  (условных единиц времени) и плановые задания по каждому виду изделий  $N_1, N_2$ :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= T, \\ x_{21} + x_{22} &= T, \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} &\geq N_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} &\geq N_2. \end{aligned}$$

На переменные  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$  налагаем дополнительные ограничения, требующие неотрицательности их значений, что вытекает из физического смысла самих переменных:  $x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0$ .

Стоимость изготовления продукции можно записать в виде следующей целевой функции:

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22}.$$

Тогда окончательно задача формулируется следующим образом.

Требуется найти такой план  $X = \|x_{ij}\|, i = 1, 2, j = 1, 2$ , при котором достигается минимум значения целевой функции:

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22}$$

и выполняются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= T, \\ x_{21} + x_{22} &= T, \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} &\geq N_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} &\geq N_2, \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, 2, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Система ограничений в этой задаче состоит из ряда неравенств и равенств.

*Симплексный метод — основной способ решения задач линейного программирования*

С помощью симплексного метода из множества возможных можно выбрать такое единственное решение, которое в принятых условиях будет наилучшим (оптимальным).

Симплексный метод позволяет осуществить последовательный целенаправленный переход от одного допустимого плана к другому. При этом упорядоченный переход от менее выгодного варианта к лучшему обеспечивает за конечное число шагов получение оптимального варианта. Каждый из этих шагов (итераций) состоит в нахождении нового плана, которому соответствует большее (при решении задач на максимум) или меньшее (при решении задач на минимум) значение целевой функции, чем значение этой же функции в предыдущем плане. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет получен оптимальный план, имеющий экстремальное значение.

Наиболее типичными задачами, для решения которых может использоваться симплексный метод, являются оптимальное планирование выпуска продукции, оптимальный набор сырья для производства продукции, эффективное использование сырьевых, материальных и энергетических ресурсов и др.

Решение задачи симплексным методом схематически включает три основных этапа:

- четкая и ясная математическая формулировка условий задачи и цели ее решения;
- нахождение оптимального решения путем вычислительных операций, предусмотренных алгоритмом симплексного метода;
- экономический анализ результатов решения и практические рекомендации.

Наиболее ответственными этапами, требующими творческого подхода к их выполнению, являются первый и третий.

Формулировка поставленной задачи требует обобщения ее экономических и математических особенностей, выбора экономически обоснованного критерия оптимальности, выявления тех условий и ограничений, при которых конкретная задача может быть решена с использованием математического метода.

Экономический анализ полученного оптимального плана проводится с целью выявления соответствия его результатов реальным условиям и установления его практической пригодности. На этом этапе устанавливаются необходимость и возможность корректировки исходной информации, выявляются ошибки и определяются пути их устранения, дается экономическая интерпретация полученного решения.

Содержанием второго этапа является вычислительный процесс, основу которого составляют обычные вычислительные операции по решению ряда взаимосвязанных линейных уравнений и неравенств. Вычислительный процесс, позволяющий получить решение задачи, выполняется по алгоритму симплексного метода.

Его можно применять, когда задача задана в специальном, каноническом виде.

Уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

имеют канонический вид, если каждое  $i$ -е уравнение содержит переменную (назовем ее  $x_{ki}$ ), коэффициент перед которой равен 1, а во всех других уравнениях коэффициент перед этой переменной равен 0. Переменные  $x_{ki}$  называются базисными, остальные — свободными.

Задача линейного программирования канонического вида может быть записана в виде симплекс-таблицы:

	$k_{m+1} \dots k_n$	
$k_1$	$a_{1k_{m+1}} \dots a_{1k_n}$	$b_1$
$\dots$		$\dots$
$k_m$	$a_{mk_{m+1}} \dots a_{mk_n}$	$b_m$
	$P_{k_{m+1}} \dots P_{k_n}$	$-Q_0$

Левый крайний столбец содержит номера  $k_i$  базисных переменных, верхняя строка — номера  $k_{m+i}$  свободных переменных. В точке пересечения строки, соответствующей значению  $k_i$ , и столбца, соответствующего  $k_{m+i}$ , стоит коэффициент  $a_{ikm} + j$ , стоящий при свободной переменной в  $i$ -м уравнении, в котором выделена базисная переменная  $x_{ki}$ . Соответственно, справа записаны постоянные члены уравнений, внизу — коэффициенты целевой функции от свободных переменных, а в правом нижнем углу — значение целевой функции —  $Q_0$ .

Решение задачи линейного программирования находится в вершине или на границе допустимой области, поэтому достаточно рассмотреть значения целевой функции только в вершинах.

Симплекс-метод заключается в последовательном переборе вершин с целью нахождения максимального или минимального значений целевой функции. В общем случае после конечного числа шагов достигается вершина, в которой целевая функция имеет оптимальное значение. Для поиска оптимального значения анализируют  $p_k$  — коэффициенты целевой функции.

Поскольку целевая функция линейна,  $p_k$  показывают, насколько изменится значение целевой функции при изменении  $k$ -й переменной на единицу, т.е. характеризуют чувствительность целевой функции к изменению  $x_k$ . Если все коэффициенты целевой функции неотрицательны ( $p_{k_{m+1}} \geq 0, \dots$ ,

$p_{kn} \geq 0$ ), то минимальное значение целевой функции равно  $Q_0$ . Если критерий не выполнен, т.е. не все коэффициенты целевой функции неотрицательны, то следует перейти от одного допустимого базисного решения к соседнему, т.е. такому, в котором множества базисных и свободных переменных изменены на один элемент. Этот процесс называют симплекс-шагом, или заменой базиса. Опишем последовательно его этапы.

1. *Выбор разрешающего столбца.* Среди элементов последней строки таблицы выбирается минимальный отрицательный элемент  $p_j$ , и соответствующий столбец называется разрешающим.

2. *Выбор разрешающей строки.* Если  $a_{ij}^* \leq 0$  для всех элементов разрешающего столбца, то минимума функции не существует. Если это не так, то для всех положительных  $a_{ij}$  нужно вычислить отношения  $b_i/a_{ij}^*$ . Строка  $i$ , для которой отношение минимально, называется разрешающей строкой. Общий элемент разрешающего столбца и разрешающей строки называется разрешающим элементом.

3. *Замена базиса при помощи разрешающего элемента  $a_{ij}$ .* Замена базиса при помощи разрешающего элемента — процесс, в ходе которого базисное переменное  $x_i^*$  становится свободным и одновременно свободное переменное  $x_j^*$  становится базисным. Если  $w$  — какое-либо значение в таблице, то  $W$  — значение, стоящее в новой таблице на том же самом месте:

- а)  $I^* = j^*$ ;  $I = i$  для  $i \neq I^*$ ;  $J^* = i^*$ ;  $J = j$  для  $j \neq J^*$ ;
- б)  $A_{i^*j^*} = 1/a_{ij}^*$ ;  $A_{ij^*} = -a_{ij}^* A_{i^*j^*}$  для  $i \neq I^*$ ,  $P_{j^*} = -p_j A_{i^*j^*}$ ;
- в)  $A_{i^*j} = a_{ij}^* A_{i^*j^*}$  для  $j \neq J^*$ ;  $B_{i^*} = b_i A_{i^*j^*}$ .

	...	$j$	...	$j^*$	...	*
.		.		.		.
.		.		.		.
.		.		.		.
$i$	...	$a_{ij}$	...	$a_{ij}^*$	...	$b_i$
.		.		.		.
.		.		.		.
.		.		.		.
$i^*$	...	$a_{i^*j}$	...	$a_{i^*j^*}$	...	$b_{i^*}$
.		.		.		.
.		.		.		.
.		.		.		.
	...	$P_j$	...	$P_{j^*}$	...	$(-Q_0)$

Отметим, что элементы правого столбца (свободные члены) и нижней строки (коэффициенты целевой функции) пересчитываются по тому же принципу, что и элементы в центральной части таблицы. То же справедливо для пунктов  $\varepsilon$ ,  $\delta$ :

э)  $A_{ij} = a_{ij} - A_{i^*j^*} a_{ij}^*$  для  $i \neq I^*$  и  $j \neq J^*$ ,  $P_j = p_j - A_{i^*j^*} p_{j^*}$  для  $j \neq J^*$

(при вычислениях вручную рекомендуется проделать вычисления по пункту  $\varepsilon$  по столбцам, кроме разрешающего столбца  $J^*$ );

д)  $B_{i^*} = b_i - B_{i^*j^*} a_{ij}^*$  для всех  $i$ , не равных  $i^*$ .

$(Q_0) = (-Q_0) - B_{i^*} p_{j^*}$ .

Правый столбец таблицы преобразуется аналогично нормальному разрешающему столбцу, остается неизменным также правило преобразования такого столбца, сформулированное в пункте  $\varepsilon$ . Единое для столбца число, уже имеющееся (см. пункт в), здесь есть  $B_{i^*}$ . Всегда должно получаться  $B_i \geq 0$  и  $(-Q_0) \geq (Q_0)$ . Может случиться, что  $P_j < 0$ , хотя  $p_j > 0$ :

	...	$J$	...	$J$	...	
.		.		.		.
.		.		.		.
$I$	...	$A_{ij}$	...	$A_{ij}^*$	...	$B_i$
.		.		.		.
.		.		.		.
$I$	...	$A_{i^*j}$	...	$A_{i^*j}^*$	...	$B_i$
.		.		.		.
.		.		.		.
	...	$P_j$	...	$P_j^*$	...	$(-Q_0)$

Экономико-математические модели линейного программирования обладают рядом преимуществ: они просты, при построении модели экономического процесса обычно требуют информации, которая имеется в документации экономических служб, решаются по стандартным программам на ЭВМ. Особенно необходимо отметить тот факт, что при решении задач методами линейного программирования получают двойственные оценки, представляющие дополнительную ценную экономическую информацию, используемую в анализе вариантов решения и в оперативном управлении производством. Недостатком данных моделей является их линейность и отражение статистики экономических процессов.

*Методический подход к решению задачи об использовании удобрений на предприятиях АПК*

В практике планирования производства в АПК (агропромышленный комплекс) приходится решать следующую актуальную задачу. Для выращивания некоторой культуры (или группы родственных культур) выделено  $m$  видов удобрений, соответственно в количествах  $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ . Вся посевная площадь разбита на  $n$  почвенно-климатических зон, каждая по  $d_j$  единиц,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Пусть  $a_{ij}$  — количество единиц  $i$ -го удобрения, вносимого на единицу площади  $j$ -й зоны, при этом с единицы площади  $j$ -й зоны получаем увеличение средней урожайности на  $c_j$  единиц. Распределить выделенный фонд удобрений между посевными зонами так, чтобы суммарный прирост урожайности культуры за счет внесения удобрений был максимальным.

Обозначим через  $x_j$  количество единиц площади  $j$ -й зоны, которые необходимо удобрить, тогда задачу математически можно сформулировать следующим образом. Найти максимум линейной формы:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i,$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим решение примера сформулированной задачи по данным Департамента сельского хозяйства Карагандинской области. Исходные данные по Карагандинской области, как самого крупного региона Республики Казахстан, заданы в таблице 5.

**Исходные данные для решения задачи об использовании удобрений  
(данные Карагандинской области)**

Зоны	Посевная площадь, га	Затраты на 1 га, ц			Прирост урожайности на 1 га, ц
		Фосфорные удобрения	Азотные удобрения	Калийные удобрения	
1	100000	2	1	1	12
2	150000	1	2	$\frac{5}{4}$	14
3	200000	1	$\frac{1}{2}$	0	10
Имеющиеся удобрения, ц		400000	300000	100000	

Обозначим через  $x_1$  количество гектаров, которые необходимо удобрить в зоне 1,  $x_2$  — в зоне 2 и  $x_3$  — в зоне 3, и сформулируем задачу линейного программирования. Найти максимум линейной формы:

$$Z = 12x_1 + 14x_2 + 10x_3$$

при

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 400000 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 300000 \\ x_1 + \frac{5}{4}x_2 \leq 100000 \\ x_1 \leq 100000 \\ x_2 \leq 150000 \\ x_3 \leq 200000 \end{cases}$$

От неравенств переходим к равенствам и отыскиваем минимум линейной формы:

$$Z = -12x_1 - 14x_2 - 10x_3$$

при

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 400000 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4000000 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_5 = 300000 \\ x_1 + \frac{5}{4}x_2 + x_6 = 100000 \\ x_1 + x_7 = 100000 \\ x_2 + x_8 = 150000 \\ x_3 + x_9 = 200000 \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 9. \end{cases}$$

Векторы  $A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$  выбираем за базис, тогда  $x_0 = A_0$ .

Составляем таблицу 6, по которой за четыре итерации найдем оптимальный план (табл. 7, 8 и 9).

$$X_3 = (x_1 = 100000; x_2 = 0; x_3 = 200000).$$

Первая итерация вычислительного процесса

$i$	Базис	$C$ базиса	$A_0$	-12	-14	-10	0	0	0	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
1	$A_4$	0	400000	2	1	1	1	0	0	0	0	0
2	$A_5$	0	300000	1	2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0
3	$A_6$	0	100000	1	$\frac{5}{4}$	0	0	0	1	0	0	0
4	$A_7$	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	$A_8$	0	150000	0	1	0	0	0	0	0	1	0
6	$A_9$	0	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$m+1$			0	12	14	10	0	0	0	0	0	0

Таблица 7

Вторая итерация вычислительного процесса

$i$	Базис	$C$ базиса	$A_0$	-12	-14	-10	0	0	0	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
1	$A_4$	0	320000	$\frac{6}{5}$	0	1	1	0	$-\frac{4}{5}$	0	0	0
2	$A_5$	0	140000	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{8}{5}$	0	0	0
3	$A_2$	-14	80000	$\frac{4}{5}$	1	0	0	0	$\frac{4}{5}$	0	0	0
4	$A_7$	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	$A_8$	0	70000	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	1	0
6	$A_9$	0	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$m+1$			-1120000	$\frac{4}{5}$	0	10	0	0	$-\frac{56}{5}$	0	0	0

Таблица 8

Третья итерация вычислительного процесса

$i$	Базис	$C$ базиса	$A_0$	-12	-14	-10	0	0	0	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
1	$A_4$	0	120000	$\frac{6}{5}$	0	0	1	0	$-\frac{4}{5}$	0	0	-1
2	$A_5$	0	40000	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	1	$\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{1}{2}$
3	$A_2$	-14	80000	$\frac{4}{5}$	1	0	0	0	$\frac{4}{5}$	0	0	0
4	$A_7$	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	$A_8$	0	70000	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	1	0
6	$A_3$	-10	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$m+1$			-3120000	$\frac{4}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{56}{5}$	0	0	-10

**Четвертая итерация вычислительного процесса**

$i$	Базис	$C$ базиса	$A_0$	-12	-14	-10	0	0	0	0	0	0
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$
1	$A_4$	0	0	0	0	0	1	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	0	-1
2	$A_5$	0	100000	0	0	0	0	1	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{2}$
3	$A_2$	-14	0	0	1	0	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	0
4	$A_7$	-12	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	$A_8$	0	150000	0	0	0	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0
6	$A_3$	-10	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$m+1$			3200000	0	0	0	0	0	$-\frac{56}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	-10

При этом  $Z_{\max} = 3\,200\,000$ . То есть для получения максимального прироста урожайности данной культуры в размере 3 200 000 ц необходимо удобрить 1 и 3 зоны. При этом фосфорные и калийные удобрения будут израсходованы полностью, а 100 000 ц азотных останутся неизрасходованными.

References

- 1 Yudin D.B., Golstein E.G. Linear programming (theory, methods and appendices). — Moscow: Science, 1969. — 424 p.
- 2 Bulavsky V.A., Zvyagin R.A., Yakovleva M.A. Numerical methods of linear programming. — Moscow: Main edition of physical and mathematical literature of «Science» publishing house, 1977. — 368 p.
- 3 Kremer N.Sh., Putko B.A., Trishin I.M., Friedman M.N. Research of operations in economy: Manual. — Moscow: Banks and exchanges, UNITI, 1997. — 407 p.
- 4 Malik G.S. Bases of economy and mathematical methods in planning: Textbook. — Moscow: The higher school, 1988. — 279 p.
- 5 Braverman E.M. Mathematical models of planning and management in economic systems. — Moscow: Main edition of physical and mathematical literature of «Science» publishing house, 1976. — 368 p.
- 6 Monakhov A.V. Mathematical methods of the analysis of economy. — SPb.: St. Petersburg, 2002. — 176 p.
- 7 Shelobayev S.I. Mathematical methods and models in economy, finance, business: Manual. — Moscow: UNITI — DANA, 2000. — 367 p.

Р.С.Каренов

**Сызықтық бағдарламалау оңтайлылықты іздестіру бойынша техникалық-экономикалық міндеттерді шешу үшін операцияларды зерттеудің ерекше тәсілі ретінде**

Сызықтық бағдарламалаудың қолдағы бар ресурстарды оңтайлы бөлу міндетін шешу тәсілі ретіндегі мәні және маңызы талданған. Академик Л.В.Канторович ұсынған негізгі өндірістік есептің мазмұны ашылған. Сызықтық бағдарламалау есептерін шешу тәсілдерінің жалпы сипаттамасы берілген. Өндірісті жоспарлау, болжау және басқару тәжірибесінде қолданылатын сызықтық бағдарламалаудың іргелі экономикалық-математикалық модельдердің рөлі және маңызы бөлініп көрсетілген. Сызықтық бағдарламалаудың басты әдіс ретіндегі симплекс тәсіліне айрықша көңіл бөлінген. Ауыл шаруашылығы кәсіпорындарында минералды тынайтқыштарды пайдалану жөніндегі есептерді шешуге әдістемелік тұрғыдан қарау жолдары ұсынылған.

## Linear programming as a specific method of research of operations for the solution of technical and economic tasks on optimum search

The essence and value of linear programming as method of the solution of a problem of optimum distribution of available resources are analyzed. The maintenance of the main production objective offered by academician L.V.Kantorovich reveals. The general characteristic of methods of the solution of problems of linear programming is given. The role and value of fundamental economic-mathematical models of the linear programming used in practice of planning, forecasting and production management are allocated. The special attention is focused on a simplex method as the main way of the solution of problems of linear programming. The methodical approach for the solution of a task on use of mineral fertilizers at the agricultural enterprises is offered.

УДК 338.26.015:51

Р.С.Каренов

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: karenov\_r@inbox.ru)*

### Теоретические и методические основы применения метода линейного программирования в горно-экономических исследованиях

Подчеркивается, что математический аппарат, используемый при планировании, прогнозировании, проектировании и расчетах, связанных с организационно-хозяйственной деятельностью горных предприятий, разнообразен. Указывается, что задачи оптимизации работы предприятия по добыче полезного ископаемого можно условно разбить на пять типов. Доказывается, что теоретической основой для решения горно-экономических задач может стать линейное программирование, являющееся наиболее разработанным разделом математического программирования. Рассматриваются возможности применения метода линейного программирования для установления оптимального варианта мероприятий по развитию группы объектов на горном предприятии. Показывается целесообразность использования данного метода при выборе оптимального графика вскрышных работ при открытом способе добычи полезного ископаемого. Предлагаются методы оптимального планирования добычи железной руды на участках карьера с применением симплексного метода. Разработаны методические положения по нахождению оптимального количества рабочих на добычных участках шахты с помощью симплексного метода.

*Ключевые слова:* линейное программирование, горно-экономические задачи, метод отыскания оптимума, транспортная задача.

*Математический аппарат, используемый при прогнозировании, проектировании и расчетах, связанных с организационно-хозяйственной деятельностью горных предприятий*

Выбор варианта решения для сложных систем без применения математических методов оптимизации и быстродействующей вычислительной техники не гарантирует выбора наилучшего варианта. Как показала практика, выбранные варианты часто отличаются от оптимальных на 10 % и более.

Характер исследований по горной экономике в значительной мере определяется специфическими особенностями производства:

- а) взаимосвязью большого числа производственных единиц с различными видами технологических схем, оборудования и форм организации труда;
- б) перемещением больших масс полезного ископаемого и пород;
- в) разбросанностью предприятий и производственных участков внутри предприятий;
- г) непостоянством рабочего места и производственных условий.

Математический аппарат, используемый при планировании (прогнозировании), при проектировании и расчетах, связанных с организационной и хозяйственной деятельностью, чрезвычайно разнообразен.