КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ $SP\ (L_6)$. I. КОНЕЧНАЯ БАЗИРУЕМОСТЬ

Башеева А.О., Султанкулов К.Д., Швидефски М.В.

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Институт математики СО РАН им. Соболева

E-mail: basheyeva_ao@enu.kz, kuanysh.sultankulov@edu.kz, semenova@math.nec.ru

Пусть X произвольное множество и $R \subseteq X^2$ отношение частичного порядка. Подмножество $R^{'} \subseteq R$ называется подпорядком в R, если оно само является частичным порядком на X. Множество $O(R, X)$ всех подпорядков частичного порядка R является частично упорядоченным множеством относительно теоретико множественного включения. Очевидно, что $\Delta = \{(a, a)|a \in X\}$ является подпорядком в R и содержится в любом подпорядке R. Таким образом, Δ является наименьшим элементом в $O(R, X)$. Также очевидно, что R яваляется наибольшим элементом в $O(R, X)$. Нетрудно проверить, что для любого семейства $\{R_i|i \in I\} \subseteq O(R, X)$ отношение $\cap_{i \in I} R_i$ так же является подпорядком в R, т.е. $\cap_{i \in I} R_i \in O(R, X)$. Таким образом $O(R, X)$ является полной решёткой, в которой справедливо равенство $\cup_{i \in I} R_i = (\cup_{i \in I} R_i)^t$, где V^t обозначает транзитивное замыкание для любого бинарного отношения $V \subseteq X^2$.

Для произвольного класса решёток K пусть $S(K)$ обозначает класс решёток, изоморфно вложимых в решётку из класса K, а $P(K)$ класс решёток изоморных декартовым произведениям решёток из класса K. Если класс K содержит лишь одну решётку L (с точностью до изоморфизма), то мы пишем $O(L)$ вместо $O(\{L\})$ для любого оператора O. Хорошо известно, что для любой конечной решётки L класс $SP(L)$ является квазимногообразием. Пусть $\mathrm{Q}(K)$ обозначает наименьшее квазимногообразие содержащее класс K. Таким образом $\mathrm{Q}(L) = SP(L)$ для любой конечной решётки L.

Решетки подотрядков рассматривались в ряде работ, поскольку они представляют собой удобный инструмент для доказательства определенных результатов о вложениях.

По теореме Д. Бредихина и Б. Шейна [1] решетки подпорядков являются решеточно-универсальными, то есть каждая решетка вложима в подходящую решетку подпорядков. По теореме Б. Сивака [2] решетка L вложима в решетку подпорядков конечного частичного порядка тогда и только тогда, когда L конечна и ограничена снизу в смысле Р. Маккензи. Общая конструкция для вложения произвольной решетки в подходящую решетку подпорядков было предложено А.Ю. Ольшанским. На основе этой конструкции в работе [4] показано, что при произвольном $n \geq 1$ класс $\mathrm{SO_n}$ решеток, вложимых в решетки подпорядков частично упорядоченных множеств длины не более n образует многообразие с конечным базисом. В этой же работе, спрашивается, является ли квазимногообразие, порожденное конечной решеткой подпорядков многообразием.

В данной работе мы даем положительный ответ на этот вопрос для решетки L6, где L6 конечная решетка, изоморфная решетке подпорядков трехэлементной цепи. Тогда квазимногообразие, порожденное решеткой L6 является конечно базируемым многообразием. И найден конкретный базис этого многообразия.

Список использованной литературы

1. D. Bredikhin, B. Schein, Representation of ordered semigroups and lattices by binary relations, Colloq. Math. 39 (1978), 1_12; https://doi.org/10.4064/cm-39-1-1-12.

2. B. Sivak, Representation of _nite lattices by orders on _nite sets, Math. Slovaca 28, no. 2 (1978), 203_215; https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/136175.

3. R. McKenzie, Equational bases and non-modular lattice varieties, Trans. Amer. Math. Soc.174, no. 1 (1972), 1_43; https://doi.org/10.2307/1996095

4. M. V. Semenova, On lattices that are embeddable into lattices of suborders, Algebra and Logic,44, no. 4 (2005), 270_285; https://doi.org/10.1007/s10469-005-0027-7.