УДК 517. 956.2

Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными прямыми

About one first order system of the partial differential equations with singular lines

Тунгатаров А., Ахмед-Заки Д.К.

Финансовая академия, Астана (e-mail: Tun-mat@list.ru, mdina84@mail.ru)

Мақалада сингулярлы түзулерді және дифференциалды бөлігінде Фукс операторы бар бірінші ретті дербес туынды дифференциалды теңдеулер жүйесінің үзіліссіз шешімдері алынған. Осы кластар үшін Дирихле және Нейман есептері шешілген. Бұл жүйенің дифференциалды бөлігінде Фукс операторы бар. Осы теңдеулердің дербес түрлері. З.Д.Усмановтың, Л.Г.Михайловтың, А.Түнғатаровтың, М.Райссигтің жұмыстарында қарастырылған және тығыздалу нүктесі бар оң қисықтанған беттердің шексіз аз иілу теориясында қолданылған. Бұл түзудегі сингулярлығы бар дифференциалды теңдеулер жүйесі бұрын зерттелмеген.

Work is received one variety of continuous solutions by one class first order partial differential equations in plane with singular lines. The Dirihlet and Neumann boundary value problems for this class are solved. In the given system the differential part of the equations contains Fuks operator. Partial views of such equations are considered in Z.D.Usmanov, L.G.Mikhailov, A.Tungatarov, M.Riessig's works and are used in the theory infinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with a flattening point. The considered system of the differential equations with singularity on lines earlier was not studied.

Пусть $0<\varphi_0\le 2\pi,\ 0\le\varphi_1,\varphi_2\le\varphi_0$ и $G=\left\{z=re^{i\varphi}:0\le r<\infty,\ 0\le\varphi\le\varphi_0\right\}$. Рассмотрим в G уравнение

$$2\bar{z}a_1(\varphi)\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}+2za_2(\varphi)\frac{\partial w}{\partial z}+a_3(\varphi)w+\frac{r^{\alpha}\cdot b(\varphi)\overline{w}}{\left|y-k_1x\right|^{\alpha}}=\frac{f(\varphi)\cdot r^{\nu+\alpha}}{\left|y-k_2x\right|^{\alpha}}, \tag{1}$$

где $a_1(\varphi),\ a_2(\varphi),a_3(\varphi),b(\varphi),f(\varphi)\in C\left[0,\varphi_1\right]$; $k_1=tg\varphi_1,\quad k_2=tg\varphi_2$, $0<\alpha<1$; $\nu>0$ — действительные параметры. Пусть $p>1$, если $\nu\ge 1$, и $1<p<\dfrac{1}{1-\nu}$, если $\nu<1$. Решение уравнения (1) ищем в классе

$$W_p^1(G)\cap C(G). \tag{2}$$

Здесь $W_p^1\left(G\right)$ — пространство С.Л. Соболева $\left[1;1\right]$.

Если уравнение (1) разрешить относительно $\partial_{\bar{z}}w$, то оно становится уравнением с сингулярной точкой и линией. При $\alpha=0$ и $a_3(\varphi)\equiv 0$ такое уравнение изучено в работах З.Д. Усманова, А.Б. Тунгатарова, М. Райссига и их учеников [2–4]. При $\alpha\ne 0$ уравнение (1) еще не изучено.

Используя формулы [1]

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{e^{-i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

уравнение (1) записываем в полярной системе координат:

$$r(a_1(\varphi)+a_2(\varphi))\frac{\partial w}{\partial r}+i(a_1(\varphi)-a_2(\varphi))\frac{\partial w}{\partial\varphi}+a_3(\varphi)w+\frac{b(\varphi)\overline{w}}{\left|\sin\varphi-k_1\cos\varphi\right|^{\alpha}}=\frac{f(\varphi)\cdot r^{\nu}}{\left|\sin\varphi-k_2\cos\varphi\right|^{\alpha}}. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) из класса (2) ищем в виде

$$w=r^{\nu}\psi(\varphi), \tag{4}$$

где $\psi\left(\varphi\right)$ — новая неизвестная функция из класса $C^1[0,\varphi_1]$.

Пусть $a_1(\varphi)\ne a_2(\varphi)$. Подставляя (4) в (3), имеем:

$$\psi'+A_{\nu}(\varphi)\cdot\psi=b_{\alpha}(\varphi)\cdot\overline{\psi}+f_{\alpha}(\varphi), \tag{5}$$

где $A_\nu(\varphi) = -\dfrac{i\nu(a_1(\varphi)+a_2(\varphi)+\dfrac{a_3(\varphi)}{\nu})}{(a_1(\varphi)-a_2(\varphi))}$, $b_\alpha(\varphi) = \dfrac{ib(\varphi)}{\left|\sin\varphi - k_1\cos\varphi\right|^\alpha \cdot (a_1(\varphi)-a_2(\varphi))}$,

$f_\alpha(\varphi) = -\dfrac{if(\varphi)}{\left|\sin\varphi - k_2\cos\varphi\right|^\alpha \cdot (a_1(\varphi)-a_2(\varphi))}$. Используя преобразование

$$\psi_1 = \psi \cdot \exp(\int_0^\varphi A_\nu(\gamma)d\gamma), \tag{6}$$

уравнение (6) записываем в виде:

$$\psi_1'(\varphi) = g(\varphi)\cdot\overline{\psi_1} + h(\varphi), \tag{7}$$

где $g(\varphi) = b_\alpha(\varphi)\cdot\exp(2i\int_0^\varphi \operatorname{Im} A_\nu(\gamma)d\gamma)$, $h(\varphi) = f_\alpha(\varphi)\cdot\exp(\int_0^\varphi A_\nu(\gamma)d\gamma)$. Интегрируя уравнение (7), получим: $\psi_1(\varphi) = \int_0^\varphi g(\gamma)\cdot\overline{\psi_1(\gamma)}d\gamma + \int_0^\varphi h(\gamma)d\gamma + c$, где c — произвольное комплексное число. Так как $0<\alpha<1$, $a_1(\varphi)\neq a_2(\varphi)$, то интегралы, имеющиеся в правой части последнего уравнения, сходятся. Используя оператор $(Bf)(\varphi) = \int_0^\varphi g(\gamma)\overline{f(\gamma)}d\gamma$, последнее уравнение записываем в виде:

$$\psi_1(\varphi) = (B\psi_1)(\varphi) + F_{\nu,1}(\varphi) + c, \tag{8}$$

где $F_{\nu,1}(\varphi) = \int_0^\kappa h(\gamma)d\gamma$. В дальнейшем используем следующие операторы:

$$(B^0 f)(\varphi) = f(\varphi),\ (B^n\psi)(\varphi) = (B(B^{n-1}\psi))(\varphi),\ n = (\overline{1,\infty}),$$

$$I_{\nu,n}(\varphi) = \int_0^\varphi g(\gamma)\overline{I_{\nu,n-1}(\gamma)}d\gamma,\ I_{\nu,1}(\varphi) = \int_0^\varphi g(\gamma)d\gamma,\ n = (\overline{2,\infty}).$$

Легко можно проверить, что имеют место следующие равенства:

$$(B(I_{\nu,n}(\varphi)))(\varphi) = I_{\nu,n+1}(\varphi),\ (B_n\psi)(\varphi) = (B(B_{n-1}\psi))(\varphi),\ (Bc)(\varphi) = \overline{c}\cdot I_{\nu,1}(\varphi),\ n = (\overline{1,\infty}). \tag{9}$$

Действуя оператором $B\psi_1(\varphi)$ на обе части равенства (8), учитывая при этом (9), имеем:

$$(B\psi_1)(\varphi) = (B^2\psi_1)(\varphi) + (BF_{\nu,1})(\varphi) + \overline{c}I_{\nu,1}(\varphi). \tag{10}$$

Из (8) и (10) вытекает

$$\psi_1(\varphi) = (B^2\psi_1)(\varphi) + (BF_{\nu,1})(\varphi) + F_{\nu,1}(\varphi) + \overline{c}I_{\nu,1}(\varphi) + c. \tag{11}$$

Если снова будем действовать оператором $(B\psi_1)(\varphi)$ на обе части равенства (11), то, учитывая (9), получим:

$$(B\psi_1)(\varphi) = \left(B^3\psi_1\right)(\varphi) + (B^2F_{\nu,1})(\varphi) + (BF_{\nu,1})(\varphi) + cI_{\nu,2}(\varphi) + \overline{c}I_{\nu,1}(\varphi). \tag{12}$$

Из (8) и (12) следует $\psi_1 = (B^3\psi_1)(\varphi) + (B^2F_{\nu,1})(\varphi) + (BF_{\nu,1})(\varphi) + F_{\nu,1}(\varphi) + \overline{c}I_{\nu,2}(\varphi) + cI_{\nu,1}(\varphi) + c$.

Продолжая этот процесс *2n* раз, получаем следующее представление решений уравнения (5):

$$\psi_1(\varphi) = (B^{2n+1}\psi_1)(\varphi) + \sum_{j=0}^{2n}(B^jF_{\nu,1})(\varphi) + \overline{c}\cdot\sum_{j=1}^{n-1}I_{\nu,2j-1}(\varphi) + c\,(1+\sum_{j=1}^{n}I_{\nu,2j}(\varphi)). \tag{13}$$

Используя виды функций $(B^j f)(\varphi)$, $I_{\nu,j}(\varphi)$, легко можно получить оценки:

$$\left|(B^n\psi_1)(\varphi)\right| \le \left|\psi_1\right|_0\cdot\frac{(e_1\cdot\varphi)^n}{n!},\ \left|(B^jF_{\nu,1})(\varphi)\right| \le |h|_0\cdot\frac{(e_1\cdot\varphi)^j}{j!},\left|I_{\nu,j}(\varphi)\right| \le \frac{(e_1\cdot\varphi)^j}{j!},\ j = (\overline{1,n}), \tag{14}$$

где $\left|f\right|_0 = \left\|f\right\|_{C[0,\varphi_1]}$, $e_1 = \max_{0\le\varphi\le\varphi_1}\left|\int_0^\varphi b_\alpha(\gamma)d\gamma\right|$. Переходя к пределу в (13) при $n\to\infty$, с учетом оценок (14) имеем:

$$\psi_1(\varphi) = \overline{c}P_{\nu,1}(\varphi) + cP_{\nu,2}(\varphi) + F_\nu(\varphi), \tag{15}$$

где $P_{\nu,1}(\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty} I_{\nu,2j-1}(\varphi)$, $P_{\nu,2}(\varphi)=1+\sum_{j=1}^{\infty} I_{\nu,2j}(\varphi)$, $F_{\nu}(\varphi)=\sum_{j=0}^{\infty}(B^{j}F_{\nu,1})(\varphi)$. Используя опять (14) и виды функций $P_{\nu,1}(\varphi)$, $P_{\nu,2}(\varphi)$ и $F_{\nu}(\varphi)$, получим оценки для этих формул:

$$\left|P_{\nu,1}(\varphi)\right|\le sh\left(e_1\cdot\varphi\right),\ \left|P_{\nu,2}(\varphi)\right|\le ch\left(e_1\cdot\varphi\right),\ \left|F_{\nu}(\varphi)\right|\le |h|_0\cdot\exp(e_1\cdot\varphi).$$

Из (4), (6) и (15) следует

$$w(r,\varphi)=r^{\nu}\cdot\exp\left(-\int_0^{\varphi}A_{\nu}(\gamma)d\gamma\right)\cdot\left(\overline{c}\,P_{\nu,1}(\varphi)+c\,P_{\nu,2}(\varphi)+F_{\nu}(\varphi)\right). \tag{16}$$

Используя виды функций $P_{\nu,1}(\varphi)$, $P_{\nu,2}(\varphi)$ и $F_{\nu}(\varphi)$, легко можно показать, что функция $w(r,\varphi)$, заданная по формуле (16), является решением уравнения (1) из класса (2). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение (1) при $a_1(\varphi)\ne a_2(\varphi)$ имеет многообразие решений из класса (2), которые находятся по формуле (16).

Замечание. Уравнение (1) при $\alpha=0$ рассмотрено в работе [2]. Из видов функций $P_{\nu,1}(\varphi)$, $P_{\nu,2}(\varphi)$ и $F_{\nu}(\varphi)$ вытекают $P'_{\nu,2}-g(\varphi)\overline{P_{\nu,1}}=0$, $P'_{\nu,1}-g(\varphi)\overline{P_{\nu,2}}=0$, $F'_{\nu}=f_{\nu}(\varphi)+g(\varphi)\cdot\overline{F_{\nu}}$. Отсюда получим:

$$P_{\nu,1}(\varphi)=\int_0^{\varphi}g(\gamma)\overline{P_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma,\ \ P_{\nu,2}(\varphi)=1+\int_0^{\varphi}g(\gamma)\overline{P_{\nu,1}(\gamma)}d\gamma,$$

$$F_{\nu}(\varphi)=\int_0^{\varphi}F_{\nu,1}(\gamma)d\gamma+\int_0^{\varphi}g(\gamma)\overline{F_{\nu}(\gamma)}d\gamma. \tag{17}$$

Из (17) легко можно получить полезные для решения краевых задач равенства:

$$P_{\nu,1}\left(0\right)=0,\ P_{\nu,2}\left(0\right)=1,\ F_{\nu}\left(0\right)=0, \tag{18}$$

$$\int_0^{\varphi}P_{\nu,2}(\gamma)d\gamma=\frac{1}{2}\left(P^2_{\nu,2}(\varphi)-1\right),\ \int_0^{\varphi}g(\gamma)P_{\nu,1}(\gamma)\overline{P_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma=\frac{1}{2}P^2_{\nu,1}(\varphi),$$

$$\int_0^{\varphi}g(\gamma)\cdot\left|P_{\nu,1}(\gamma)\right|^2d\gamma=\frac{1}{2}\left(P_{\nu,1}(\varphi)\cdot P_{\nu,2}(\varphi)-I_{\nu,1}(\varphi)\right),$$

$$\int_0^{\varphi}g(\gamma)\cdot\left|P_{\nu,2}(\gamma)\right|^2d\gamma=\frac{1}{2}\left(P_{\nu,1}(\varphi)\cdot P_{\nu,2}(\varphi)+I_{\nu,1}(\varphi)\right).$$

Интегрируя по частям n раз интегралы для $P_{\nu,2}(\varphi)$ и $F_{\nu}(\varphi)$ из (17), соответственно также получим:

$$P_{\nu,2}\left(\varphi\right)=1+\overline{P_{\nu,1}\left(\varphi\right)}\sum_{j=1}^{n}I_{\nu,2j-1}\left(\varphi\right)-P_{\nu,2}\left(\varphi\right)\sum_{j=0}^{n}\overline{I_{\nu,2j}\left(\varphi\right)}+\int_0^{\varphi}g\left(\gamma\right)I_{\nu,2j}\left(\gamma\right)\overline{P_{\nu,1}\left(\gamma\right)}d\gamma$$

и

$$F_{\nu}\left(\varphi\right)=\int_0^{\varphi}h\left(\gamma\right)d\gamma+\int_0^{\varphi}f_{\nu}\left(\gamma\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\overline{I_{\nu,2j}\left(\gamma\right)}d\gamma-\int_0^{\varphi}\overline{h\left(\gamma\right)}\cdot\sum_{j=1}^{n}I_{\nu,2j-1}\left(\gamma\right)d\gamma+\overline{F_{\nu}\left(\varphi\right)}\cdot\sum_{j=1}^{n}I_{\nu,2j-1}\left(\varphi\right)-$$

$$-F_{\nu}\left(\varphi\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\overline{I_{\nu,2j}\left(\varphi\right)}+\int_0^{\varphi}g\left(\gamma\right)\cdot\overline{F_{\nu}\left(\gamma\right)}\cdot\overline{I_{\nu,2n}\left(\gamma\right)}d\gamma.$$

При $n\to\infty$ из последних равенств вытекают $\left|P_{\nu,2}(\varphi)\right|^2-\left|P_{\nu,1}(\varphi)\right|^2=1$,

$$\int_0^{\varphi}h(\gamma)\overline{P_{\nu,2}(\gamma)}d\gamma-\int_0^{\varphi}\overline{h(\gamma)}P_{\nu,1}(\gamma)d\gamma=F_{\nu}(\varphi)\overline{P_{\nu,2}(\varphi)}-\overline{F_{\nu}(\varphi)}P_{\nu,1}(\varphi).$$

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения (1).

Задача D. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее краевому условию

$$w(r,0)=\beta_1 r^{\nu}, \tag{19}$$

где β_1 — заданное действительное число.

Решение задачи. Подставляя формулу (16) в краевые условия (19), имеем:

$$c = \beta_1 . \tag{20}$$

Следовательно, решение уравнения (1) имеет вид:

$$w(r,\varphi) = r^{\nu} \cdot \exp\left(-\int_0^{\varphi} A_{\nu}(\gamma)d\gamma\right) \cdot \left(\beta_1 P_{\nu,1}(\varphi) + \beta_1 P_{\nu,2}(\varphi) + F_{\nu}(\varphi)\right). \tag{21}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Задача D имеет единственное решение в виде (4). И это решение определяется по формуле (21).

Теперь рассмотрим задачу Неймана.

Задача N. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее краевому условию

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}(r,0) = \beta_2 r^{\nu}, \tag{22}$$

где β_2 — заданное действительное число.

Решение задачи. Подставляя формулу (16) в краевое условие (22), с учетом (18) имеем:

$$-c \cdot A_{\nu}(0) + \bar{c} \cdot b_{\alpha}(0) = \beta_2 - f_{\alpha}(0). \tag{23}$$

Следовательно, при условии $\delta = A_{\nu}(0)\overline{b_{\alpha}(0)} - \overline{A_{\nu}(0)} \cdot b_{\alpha}(0) \neq 0$ решение уравнения (23) имеет вид:

$$c = \frac{-A_{\nu}(0)(\beta_2 - \overline{f_{\alpha}(0)}) - \overline{b_{\alpha}(0)}(\beta_2 - f_{\alpha}(0))}{\delta}. \tag{24}$$

Теорема 3. При $\delta \neq 0$ задача N имеет единственное решение в виде (4), которое определяется по формулам (16) и (24).

В случае $\delta = A_{\nu}(0)\overline{b_{\alpha}(0)} - \overline{A_{\nu}(0)} \cdot b_{\alpha}(0) = 0$ для разрешимости уравнения (23) необходимо и достаточно выполнение равенства

$$-A_{\nu}(0)(\beta_2 - \overline{f_{\alpha}(0)}) - \overline{b_{\alpha}(0)}(\beta_2 - f_{\alpha}(0)) = 0. \tag{25}$$

При выполнении этих условий решение уравнения (23) находится по формуле

$$c = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta_3} \cdot (\mathrm{Re}(\beta_2 - f_{\alpha}(0)) + i\beta_5(b_{\alpha}(0) - \overline{A_{\nu}(0)})), & \text{если } \beta_3 \neq 0, \\ \dfrac{1}{\beta_4} \cdot (i\,\mathrm{Re}(\beta_2 - f_{\alpha}(0)) - i\beta_6(\overline{b_{\alpha}(0)} + \overline{A_{\nu}(0)})), & \text{если } \beta_4 \neq 0, \\ \beta_7, \quad \text{если } \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 0, & \end{cases} \tag{26}$$

где β_5, β_6 — произвольные действительные и β_7 — произвольное комплексное числа, $\beta_3 = \mathrm{Re}(-A_{\nu}(0) + b_{\alpha}(0))$, $\beta_4 = \mathrm{Im}(b_{\alpha}(0) + A_{\nu}(0))$.

Теорема 4. При $\delta = 0$ и выполнении условия (25) задача N имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формулам (16) и (26).

References

1. *Vekua I.N.* Generalized Analytic Function. — Moscow: Fizmatgiz, 1959 (Russian), English translation. — Oxford: Pergamon Press, 1962. — 628 p.
2. *Tungatarov A., Burgumbayeva S.K., Mukasheva D.K.* About one system first order partial differential equations Fuks type in plane // Eurasian mathematical journal. — 2006. — № 3. — P. 58–67.
3. *Mikhailov L.G.* A New Class of Singular Integral Equations and its Applicatios to Differential Equations with Singular Coefficient. — Dushanbe: Irfon, 1963 (Russian). — 183 p.
4. *Usmanov Z.D.* Ifinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with a flattening point // Differential Geometry. — Warsaw: Banach Center Publications, 1984. — Vol. 12. — P. 241–272.