УДК 536.24

Т.А.Жакатаев[1], К.Ш.Какимова[2]

[1]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: Toksanzh@yandex.kz);*
[2]*Карагандинский государственный технический университет (E-mail: Klara_kakaimova_71@mail.ru)*

Комментарий к выводу закона сохранения энергии для конечного подвижного и малого индивидуального объема сплошной среды

Рассмотрен вывод уравнения сохранения энергии для конечного подвижного объема с учетом работы массовых и поверхностных сил, потока тепла Фурье, конвективного и радиационного потоков энергии и потока энергии в результате действия химических источников. Установлены условия для входящих или же выходящих векторных потоков для физических субстанций, при которых выводы уравнений для конечного объема с подвижными внешними границами и для уравнения малого индивидуального объема (при неподвижных границах) приводят к идентичным, совпадающим результатам. Физический закон возрастания или убывания энергии в заданном объеме согласуется с математическими свойствами поверхностных интегралов и свойствами векторных полей в пространстве, может правильно ими описываться. Показано, что члены с дивергенцией скорости влияют и на изменение полной энергии объема.

Ключевые слова: сохранение, энергия, объем, движущийся, границы, подвижные, среда, жидкая, газовая, источники, массовые, тепловая.

Закон сохранения энергии в движущихся (подвижных) объемах сплошных сред формулируется следующим образом: изменение во времени полной энергии объема (Дж/с) жидкости и газа равно сумме: работ в единицу времени поверхностных и массовых сил, приложенных к данному объему и к его поверхности, количеств тепла в единицу времени, которые вытекают или втекают в данный объем через его поверхность, количества тепла, выделяемого в результате действия химического источника тепла в единицу времени, количества тепла, воспринимаемого или отдаваемого в результате теплового излучения (лучистый поток тепла) и притока энергии в результате втекания или вытекания дополнительной массы жидкости через боковую поверхность индивидуального объема в единицу времени [1–2]:

$$\frac{dE}{d\tau} = A_m + A_p + Q_1^* + Q_2^* + Q_3^* + Q_4^*. \tag{1}$$

Полная энергия объема $E = E_k + E_u$ складывается из кинетической энергии

$$E_k = \delta\theta\rho\frac{v^2}{2}, \tag{2}$$

где $\vec{v}$ — скорость, м/с; ρ — плотность, $\delta\theta$ — элементарный объем,
и внутренней энергии элементарного объема $\delta\tau$, которая равна

$$E_u = \delta\theta\rho e, \tag{3}$$

где e (Дж/кг) — энергия, отнесенная к массе.

Количество тепла $\vec{Q}_1$ (Дж), которое в результате теплопроводности передается от одной изотермической поверхности к другой, рассчитывается по закону Фурье [3] (рис. 1):

$$\vec{Q}_1 = -\lambda\frac{\partial t}{\partial s}\vec{n}F\tau, \tag{4}$$

где s — элементарный отрезок по направлению нормали $\vec{n}$ к рассматриваемой внешней поверхности F, м; F — площадь поверхности, через которую проходит данный тепловой поток, м^2; τ — время, с. Знак (–) показывает, что вектор теплового потока направлен в сторону понижения температуры и тепловой поток $\vec{q}$ имеет противоположное направление к направлению $\mathrm{grad}\, t$ (рис. 1).

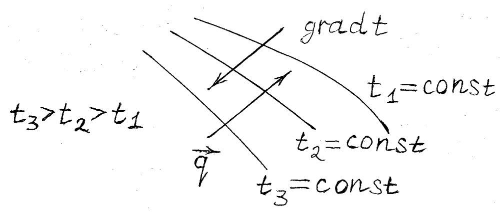

Рисунок 1. Изотермы различных поверхностей в сплошной среде

Из уравнения (4) следует, что мощность теплового потока Q^* (Вт) равна

$$d\vec{Q}_1^* = \frac{d\vec{Q}_1}{\tau} = -\lambda\frac{\partial t}{\partial s}\vec{n}dF. \quad (5)$$

Плотность теплового потока q_1 (Вт/м^2) [3]

$$d\vec{q}_1 = \frac{d\vec{Q}_1^*}{F} = -\lambda\frac{\partial t}{\partial s}\vec{n}, \quad (6)$$

где единичный вектор $\vec{n}$ показывает направление градиента температуры, т.е. он направлен в сторону возрастания значений t. Знак (–) показывает, что тепловой поток $\vec{q}_1$ имеет противоположное направление к направлению $\mathrm{grad}\,t$.

Преобразуем (5) с помощью теоремы Остроградского–Гаусса в объемный интеграл:

$$Q_1^* = \int_F \vec{q}\cdot\vec{n}d\sigma = \int_V div(\vec{q})d\theta = \pm\int_V div(\lambda\,\mathrm{grad}\,t)\delta\theta, \quad (7)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности F.

При выводе уравнения теплопроводности, исходя из интегральных законов сохранения энергии, знак (–) в (4–6) необходимо учитывать специальным образом, исходя из свойств поверхностного интеграла, векторных полей и свойств входящих и выходящих тепловых потоков в рассматриваемый заданный объем.

При подстановке (7) в (1) знак (–) исчезает в том случае, когда два вектора, $\vec{q}$ и $\vec{n}$, направлены в противоположные стороны, $\vec{q}_n\uparrow\vec{n}\downarrow$ и угол между ними $\pi/2\le\varphi\le3/2\pi$, $\vec{q}_n$ — проекция $\vec{q}$ на направление вектора $\vec{n}$. Тогда скалярное произведение $\vec{q}\cdot\vec{n}$ имеет отрицательный знак (–) (рис. 2):

$$\vec{q}\cdot\vec{n} = |\vec{q}|\cdot|\vec{n}|\cos\varphi\le 0. \quad (8)$$

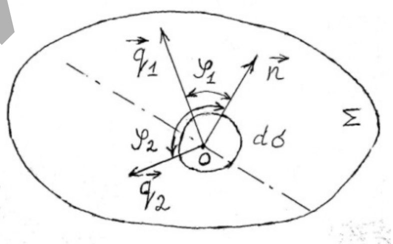

Рисунок 2. Схема расположения нормали $\vec{n}$ и тепловых потоков $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ на поверхности Σ

Данный минус (–) умножается на минус (–) из формулы (6) и в итоге при переходе к функции градиента в формуле (7) итоговый знак получается (+) положительный. Такое подробное и ясное объяснение влияния угла между двумя векторами, $\vec{q}$ и $\vec{n}$, на знак скорости изменения dE/dt, к сожалению, нам ранее не встречалось в доступных для нас источниках. Впервые, и не в столь подробной форме, с похожим объяснением мы ознакомились в работе [4].

Когда два вектора, $\vec{q}$ и $\vec{n}$, направлены в одну сторону, т.е. когда они сонаправлены $\vec{q}_n\uparrow\vec{n}\uparrow$ и угол между ними $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$, то скалярное произведение $\vec{q}\cdot\vec{n}$ имеет положительный знак (+):

$$\vec{q}\cdot\vec{n} = |\vec{q}|\cdot|\vec{n}|\cos\varphi\ge 0. \quad (9)$$

В этом случае данный (+) умножается на минус (–) из формулы (6) и в итоге при переходе к функции градиента в формуле (7) итоговый знак получается (–) отрицательный.

Таким образом, учет знаков теплового потока на основе свойств поверхностного интеграла и свойств векторных полей позволяет теоретически правильно учесть и получить знаки производной в выражении $(\pm)\, dE/d\tau$ в формуле (1). Когда тепловой поток $\vec{q}$ втекает в заданный объем V энергия в объеме увеличивается $(+dE/d\tau)$. Когда тепловой поток $\vec{q}$ вытекает из рассматриваемого объема V, энергия в объеме уменьшается и производная скорости изменения энергии будет иметь отрицательный знак $(-dE/d\tau)$.

В случае рассмотрения достаточно малого индивидуального объема из (7) следует

$$dQ_1^* = \delta\theta \operatorname{div}\left(q_f\right) = \delta\theta \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} t\right), \tag{10}$$

где q_f — тепловой поток, соответствующий закону Фурье.

Однако можно сформулировать законы сохранения энергии и массы сразу для конечных (не малых) объемов. Когда объем имеет конечные размеры, необходимо учитывать подвижность внешних границ, т.е. подвижность поверхности внешней границы данного объема. В этом случае вывод уравнений теплообмена и массообмена имеет некоторые отличия от ранее рассмотренного нами вывода на лекционных занятиях.

На основании изложенного выше для подвижного конечного объема сплошной среды закон сохранения энергии формулируется в виде следующего интегрального соотношения:

$$\frac{d}{d\tau}\int_V \rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right) d\theta = \int_V \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v}\, d\theta + \iint_F \vec{p}_n \cdot \vec{v}\, d\sigma + \int_F \overrightarrow{q_f} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \int_V q_m\, d\theta + \int_V q_R\, d\theta, \tag{11}$$

где q_R — тепловой поток от радиационного излучения, Вт/м^3; q_m — тепловой поток от массовых источников тепла, Вт/м^3; $\vec{p}_n$ — вектор плотности поверхностной силы, Па; $\vec{f}_m$ — массовая плотность объемной силы, Н/кг.

Наша задача теперь заключается в том, чтобы знак производной по времени d/dt ввести внутрь интеграла в первом члене (11). Для этого воспользуемся теоремой о дифференцировании интеграла, взятого по подвижному объему, доказательство которого рассмотрено в курсе механики жидкости и газа [2–4].

Тогда будем иметь

$$\frac{d}{d\tau}\int_V \rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right) d\theta = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right) + div\left(\vec{v}\cdot\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right)\right] d\theta. \tag{12}$$

Учтем, что

$$div\left(\vec{v}\cdot\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right) = \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\left(\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right) + \rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\operatorname{div}\left(\vec{v}\right) \tag{13}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right) + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\left(\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right) = \frac{d}{d\tau}\left[\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right] \tag{14}$$

полная производная от полной энергии некоторого конечного объема движущейся среды.

Подставляя (12–14) в (11) и учитывая (4–6), получим:

$$\int_V \frac{d}{d\tau}\left[\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right] d\theta = \int_V \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v}\, d\theta + \int_V \operatorname{div}\left(P\vec{n}\cdot\vec{v}\right) d\theta +$$

$$+ \int_V \operatorname{div}\overrightarrow{q_f}\, d\theta + \int_V q_m\, d\theta + \int_V q_R\, d\theta - \int_V \left[\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\operatorname{div}\left(\vec{v}\right)\right] d\theta, \tag{15}$$

где $P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix}$ — тензор поверхностных сил давления.

Так как объем интегрирования один и тот же для всех членов, то все интегралы можно объединить в один общий интеграл и записать интегральное уравнение в виде

$$\int_V \left\{ \frac{d}{d\tau}\left[\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right] - \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v} - \operatorname{div}\left(P\vec{n}\cdot\vec{v}\right) - \operatorname{div}\overrightarrow{q_f} - q_m - q_R + \left[\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\operatorname{div}\left(\vec{v}\right)\right]\right\} d\theta = 0, \qquad (16)$$

Из свойств интеграла отсюда следует, что подынтегральная функция равна нулю. Тогда получаем

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right] = \rho\vec{f}_m\cdot\vec{v} + \operatorname{div}\left(P\vec{n}\cdot\vec{v}\right) + \operatorname{div}\overrightarrow{q_f} + q_m + q_R - \rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\operatorname{div}\left(\vec{v}\right). \qquad (17)$$

Таким образом, из свойства подвижности (расширения) границы рассматриваемого объема следует возникновение двух членов уравнений: 1 — конвективной части для полной производной [1, 2, 4]:

$$\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\left(\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right),$$

2 — возможность изменения полной энергии индивидуального объема жидкости в результате объемной деформации (сжатие или расширение):

$$\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\operatorname{div}\left(\vec{v}\right).$$

При рассмотрении элементарных (достаточно малых) объемов границы объема считаются неподвижными, а потоки тепла и массы втекают или вытекают из данного элементарного объема.

Количество тепла, передаваемое в результате радиационного излучения,

$$dQ_2 = q_R\delta\theta d\tau. \qquad (18)$$

Количество тепла, выделяемое в результате действия внутренних источников теплоты,

$$dQ_3 = q_m\delta\theta d\tau. \qquad (19)$$

Через боковую поверхность индивидуального объема втекает или вытекает дополнительная масса жидкости, которая изменяет внутреннюю и кинетическую энергию. Поверхностную плотность потока данной энергии обозначим $\vec{q}_4$, Дж/(м^{2}с),

$$\vec{q}_4 = \rho\vec{v}\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right). \qquad (20)$$

Чтобы получить полное значение потока этой энергии, необходимо проинтегрировать (20) по поверхности индивидуального объема:

$$Q_4 = \pm\int_F \left[\rho\vec{v}\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right]\cdot\vec{n}d\sigma, \qquad (21)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности σ. Вытекание некоторой массы из данного объема приводит к уменьшению энергии в рассматриваемом объеме. В этом случае знак (21) отрицательный. Другими словами, в этом случае $\vec{v}_n \uparrow \vec{n} \uparrow$ параллельны, $\vec{v}_n$ — проекция $\vec{v}$ на направление вектора $\vec{n}$. И наоборот, производная dE/dt имеет положительный знак, когда некоторая масса жидкости втекает (прибывает) в данный объем, другими словами, $\vec{v}_n \uparrow \vec{n} \downarrow$ антипараллельны.

Пусть конвективная масса входящая. Применяя формулу Остроградского-Гаусса к (21), получим:

$$Q_4 = -\int_V \operatorname{div}\left[\rho\vec{v}\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right]d\theta \qquad (22)$$

или в случае достаточно малого объема:

$$dQ_4 = -\delta\theta\,\mathrm{div}\left[\rho\vec{v}\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right]. \tag{23}$$

Подставляя (10, 18, 19, 23) в (1), получим:

$$\delta\theta\rho\frac{\partial}{\partial\tau}\left(e+\frac{v^2}{2}\right)=\delta\theta\rho\vec{f}\cdot\vec{v}+\delta\theta\,\mathrm{DIV}\left(P\vec{n}\cdot\vec{v}\right) - \delta\theta\rho\,\mathrm{div}\left[\vec{v}\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right]+\delta\theta\,\mathrm{div}\left(\lambda\,\mathrm{grad}\,t\right)+\delta\theta q_R+\delta\theta q_m. \tag{24}$$

Распишем первый член во второй строчке (24):

$$\mathrm{div}\left[\vec{v}\cdot\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\right]=\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\cdot\mathrm{div}\,\vec{v}+\vec{v}\cdot\nabla\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right). \tag{25}$$

Подставив это в (24), получим:

$$\delta\theta\rho\frac{\partial}{\partial\tau}\left(e+\frac{v^2}{2}\right)+\delta\theta\rho\vec{v}\cdot\mathrm{div}\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)=\delta\theta\rho\vec{f}\cdot\vec{v}+\delta\theta\,\mathrm{DIV}\left(P\vec{n}\cdot\vec{v}\right)-$$

$$-\delta\theta\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\cdot\mathrm{div}\,\vec{v}+\delta\theta\,\mathrm{div}\left(\lambda\,\mathrm{grad}\,t\right)+\delta\theta q_R+\delta\theta q_m. \tag{26}$$

Выражение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(e+\frac{v^2}{2}\right)+\vec{v}\cdot\nabla\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(e+\frac{v^2}{2}\right) \tag{27}$$

имеет вполне определенные физический и математический смыслы и называется полной производной от полной энергии по времени. Механизм данного определения рассмотрен в курсах механики газа и жидкости [2–4]. Подставляя (27) в (26) и сокращая на величину элементарного объема, как одинакового во всех членах множителя, получим закон сохранения энергии для индивидуального малого движущегося объема в дифференциальной форме (в наиболее полной ее форме). Следовательно, с учетом работы поверхностных и массовых сил, потока тепла по закону Фурье, радиационного излучения тепла, выделения тепла в результате действия химических источников энергии и конвективного переноса энергии

$$\rho\frac{d}{d\tau}\left(e+\frac{v^2}{2}\right)=\rho\vec{f}\cdot\vec{v}+\mathrm{DIV}\left(P\vec{n}\cdot\vec{v}\right) - \rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\cdot\mathrm{div}\,\vec{v}+\mathrm{div}\,\vec{q}_f+q_R+q_m. \tag{\textbf{28}}$$

В курсах м.ж.г. [1, 2, 4] установлено, что для несжимаемой жидкости $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$.

Когда жидкость идеальная и несжимаемая, то на основе формул (26), (28) получим закон сохранения энергии в следующем, более упрощенном виде:

$$\rho\frac{d}{d\tau}\left(e+\frac{v^2}{2}\right)=\rho\vec{f}\cdot\vec{v}-\mathrm{grad}\,p\cdot\vec{v}-p\,\mathrm{div}\,\vec{v}+\mathrm{div}\left(q_f\right)+\rho q_R+\rho q_m. \tag{29}$$

В законе сохранения энергии член

$$\pm\rho\left(e+\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)\cdot\mathrm{div}\,\vec{v}, \tag{30}$$

который выражает зависимость изменения энергии от объемной деформации (расширения или сжатия), часто не описывается во многих известных и доступных нам источниках. Поэтому мы посчитали уместным рассмотреть более подробный вывод этих уравнений. Отмечаем, что в общепринятых классических изложениях не акцентируется внимание на том, что для несжимаемой жидкости условие $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$ используется дважды: 1) — при пренебрежении членом (30); 2) — при упрощении $\mathrm{DIV}\left(P\vec{n}\cdot\vec{v}\right)$, когда расписывается тензор напряжения на основе реальных моделей для трения.

Уравнение (17) совпадает с уравнением (28). Отсюда следует, что интегральное и дифференциальное рассмотрения идентичны только в двух случаях: 1) когда внешняя подвижная граница для конечного объема расширяется, а для малого дифференциального объема конвективный поток энергии и массы является входящим, прибывающим; 2) когда внешняя подвижная граница для конечного объема уменьшается, а для малого дифференциального объема конвективный поток энергии и массы является выходящим, убывающим. Идентичность наступает только в том случае, когда скорость расширения внешней границы конечного объема $\vec{v}_F$ равна скорости движения жидкости (скорость втекания или вытекания) через внешнюю поверхность F - $\vec{v}_g$. Если эти скорости различны, то в формулах (11–17) будет фигурировать относительная скорость $\vec{v} = \vec{v}_g - \vec{v}_F$. На основе этого можно смоделировать течение жидкости через пористые поверхности. Когда для конечного объема внешняя граница движется вовнутрь, следовательно, объем уменьшается. На наш взгляд, мы это рассматриваем впервые, судя только по доступным для нас источникам.

Отсюда следует, что конвективное течение жидкостной среды через неподвижную внешнюю границу (в случае дифференциального подхода) эквивалентно (аналогично) изменению массы сплошной среды внутри рассматриваемого объема, которое возникает в результате изменения (расширения или сжатия) внешней границы (оболочки) данного рассматриваемого объема сплошной среды при постоянной плотности среды (в случае интегрального подхода). Когда внешняя граница подвижного конечного объема сжимается, в формуле (12) второй дивергентный член будет со знаком (–). В то же время, когда конвективный поток тепла и массы из малого объема убывает, вытекает, то в формулах (21), (22) в правой части будет знак минус. В этом случае объединение двух членов в (27) уже не будет иметь место. Отсюда следует, что понятие полной индивидуальной производной скалярной субстанции можно дополнить мыслью о том, что в формуле (27) второй дивергентный член можно использовать и со знаком (–), т.е. использовать в виде $\pm\vec{v}\cdot\text{grad}\left(e+\dfrac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right)$. Например, для скалярной величины ρ полную (субстанциональную) производную (с учетом знака $\vec{v}$) можно записать в виде $\dfrac{d\rho}{d\tau}=\dfrac{\partial\rho}{\partial\tau}\pm\vec{v}\cdot\text{grad}(\rho)$. Результат, показывающий уточненный подход к учету знаков для членов в правой части в формуле (1), является, на наш взгляд, теоретически более правильно обоснованным и логически последовательным, чем когда данный же результат выводится на основе свойств малого индивидуального объема и рассматриваются только разности между входящими и выходящими тепловыми (и массовыми) потоками из этого индивидуального малого объема [3, 6] (рис. 3). В этих изложениях знаки для $(\pm)\,dE/d\tau$ также получаются, на первый взгляд, правильными. Однако ограничение в том, что тепловые потоки должны быть насквозь проходящими через рассматриваемый индивидуальный объем (рис. 3). Когда входящий поток больше, чем выходящий, получается знак (+). А когда выходящий поток больше, чем входящий, знак в производной получается отрицательный (–), следовательно, внутренняя энергия в рассматриваемом объеме уменьшается [3, 6].

Рассмотрим, как вычисляется dq_f в работах [3, 6]:

$$dq_f=(q)_x-(q)_{x+dx}=(q)_x-\left[(q)_x+\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_x dx\right]=-\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_x dx. \qquad (31)$$

Знак (–) в (31) исчезает при перемножении на знак (–) в градиенте (6).

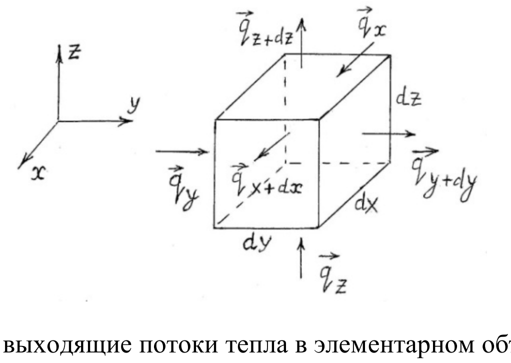

Рисунок 3. Входящие и выходящие потоки тепла в элементарном объеме $dv = dxdydz$ [3, 6]

Однако такое рассмотрение имеет следующий противоречивый момент. Когда в сторону возрастания X тепловой поток убывает, необходимо, чтобы ∂q имел знак (–) изначально (априори). Но тогда правая часть (31) будет со знаком (+). В итоге окажется, что даже при поступающем в объем тепловом потоке dq_f знак $(-dE/d\tau)$ будет показывать уменьшение энергии в этом объеме по формуле (6). Второй недостаток: данный метод вывода искомых уравнений не позволяет рассмотреть случай, когда, например, со всех сторон боковых граней параллелепипеда все тепловые потоки только входят или же все тепловые потоки только выходят из этого объема через его боковые грани. Другими словами, в этом случае достаточно сложно обосновать корректный переход от формул (4–6) к формуле (28) с учетом изменения знаков.

Поэтому мы предлагаем предпочтение отдавать выводу, изложенному здесь и основанному на свойствах конечного объема сплошной среды при подвижных внешних границах, на свойствах объемных и поверхностных интегралов, а также на свойствах векторных полей и их потоков [7]. Изложенные здесь материалы использовались на лекционных занятиях авторов. Идея статьи может быть продолжена. В дальнейшем мы планируем рассмотреть варианты, когда внешняя граница расширяется с одной скоростью и в то же время через эту (подвижную границу) проходят векторные потоки (массы, энергии, импульса) с другой скоростью. Эти скорости различны. Тогда в формулах (11), (24) появятся дополнительные члены. Но это материал следующей нашей статьи.

В [8] получена формула для закона изменения плотности вероятности квантовой частицы:

$$\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial \tau} + divS(r,\tau) = 0, \tag{32}$$

где $P(r,\tau)$— плотность вероятности по координатам для квантовой частицы, $S(r,\tau)$— плотность потока вероятности квантовой частицы по координатам. Делая ссылку на приведенный в [8] вывод, отметим только, что при выводе (32) используется свойство формул (8,9) и такой же закон учета знаков, как и в формуле (1). Значит, свойства векторных потоков через поверхность, законы перехода от поверхностных интегралов к объемным играют определяющую роль во многих фундаментальных физических процессах. Уравнение (32) имеет аналогию с уравнением неразрывности, закона сохранения массы в механике жидкости и газа. Именно переход от объемного интеграла к поверхностному привел к понятию и определению потока плотности вероятности $S(r,\tau)$.

Выводы

1. Рассмотрен вывод уравнения сохранения энергии для конечного подвижного объема с учетом работы массовых и поверхностных сил, потока тепла Фурье, конвективного и радиационного потоков энергии и потока энергии в результате действия химических источников.
2. Установлены условия для входящих или же выходящих векторных потоков для физических субстанций, при которых выводы уравнений для конечного объема с подвижными внешними границами и для уравнения малого индивидуального объема (при неподвижных границах) приводят к идентичным, совпадающим результатам.
3. Физический закон возрастания или убывания энергии в заданном объеме совпадает с математическими свойствами поверхностных интегралов и свойствами векторных полей в пространстве, может правильно ими описываться.

References

1 *Loitsyansky L.G.* Fluid and gas mechanics. — Moscow: Drofa, 2003. — 840 p.

2 *Anderson J.D.* Fundamentals of Aerodynamics. — NY, 2004. — 3rd ed. — 912 p.

3 *Issachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S.* Heat transfer. — Moscow: Energiya, 1975. — 488 p.

4 *Haberman R.* Applied partial differential equations with Fourier Series and Boundary Value problems. — New Jersey, 2004. — 769 p.

5 *Karamcheti K.* Principles of ideal-fluid Aerodynamics. — California, 1980. — 636 p.

6 *Schlichting H., Gersten K.* Grenzschicht theorie. — Berlin: Springer, 2006. — 803 p.

7 *Finikov S.P.* A course of differential geometry. — Moscow: GITTL, 1952. — 343 p.

8 *Schiff L.* Quantum mechanics. — Moscow: IL., 1957. — 475 c.