

2) Пусть  $\psi_{v,1}(0) = 0$ ,  $\psi_{v,2}(0) \neq 0$ . Тогда при  $\Delta_{v,2}(\varphi_2) \neq 0$  задача  $S - B$  имеет единственное решение, которое находится по формулам (14) и (22), а при  $\Delta_{v,2}(\varphi_2) = 0$  для разрешимости задачи  $S - B$  необходимо и достаточно выполнения условия (23). При выполнении этого условия задача  $S - B$  имеет бесконечное множество решений, которое находится по формулам (14), (24).

3) Пусть  $\psi_{v,1}(0) = \psi_{v,2}(0) = 0$ . Тогда при  $\Delta_{v,2}(\varphi_2) \neq 0$  задача  $S - B$  разрешима только тогда, когда  $b_1 = 0$ . В этом случае она имеет бесконечное множество решений, которые определяются по формуле (14), где  $c_2$  — произвольное число, а  $c_1$  находится по формуле (25), а при  $\Delta_{v,2}(\varphi_2) = 0$  и  $b_1 = 0$  для разрешимости задачи  $S - B$  необходимо и достаточно выполнения условия (26). При выполнении этого условия задача  $S - B$  имеет бесконечное множество решений, которое находится по формулам (14), (27).

**Замечание.** При  $\varphi_2 = \varphi_1$  задача типа Самарского-Бицадзе дает задачу типа Дирихле, которая рассмотрена в [1]. Там также изучен случай, когда  $\varphi_2 = \varphi_1 = 2\pi$ .

### References

1. *Tungatarov A., Sarsenbayeva M.S., Uaisov B.* About the Dirihle type problem for one class of elliptic systems of the second order on a plane with polar feature // Vestn ENU of L.N. Gumileva. — 2008. — № 4 — P. 109–117.

УДК 517.62

## О приближенном методе нахождения изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи

### On the approaching method of finding of nonlinear two points boundary value problem's isolated solution

Темешева С.М.

*Институт математики МОН РК, Алматы (e-mail: anar@math.kz, nur15@mail.ru)*

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызықты емес екі нүктелі шеттік есебін шешу үшін параметрлеу әдісінің екі параметрлі алгоритмдер әулеті ұсынылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы функциясы, шекаралық шарт функциясы, есеп қарастырылып отырған кесіндіні бөліктеу қадамы бойынша енгізілген қосымша параметрлерді табу үшін сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылған. Құрастырылған алгоритмдердің жинақты болуының және зерттеліп отырған есептің оқшауланған шешімі бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалады.

The nonlinear two points boundary value problem for system of ordinary differential equations is considered. Two parameters families of parameterization's method algorithms of findings of investigating problem's approaching solution is offered. On functions of the right part of differential equation, the boundary value condition, step of the pounding in interval, on which boundary value problem is considered, nonlinear system of the algebraic equations for finding of introducing additional parameter is constructed. They necessary and sufficient conditions of convergence constructed algorithms and existence of the isolated solution of investigating problem are established.

В работе рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$g(x(0), x(T)) = 0, \quad (2)$$

где  $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $g: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  непрерывны.

Через  $C([0, T], R^n)$  обозначим пространство непрерывных функций  $x: [0, T] \rightarrow R^n$  с нормой  $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ .

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая на  $[0, T]$  вектор-функция  $x^*(t) \in C([0, T], R^n)$ , удовлетворяющая на  $[0, T]$  дифференциальному уравнению (1) (при этом в точках  $t=0, t=T$  уравнению (1) удовлетворяют односторонние производные  $\dot{x}_{\text{прав.}}^*(0), \dot{x}_{\text{лев.}}^*(T)$ ) и имеющая в точках  $t=0, t=T$  значения  $x^*(0), x^*(T)$ , для которых справедливо равенство (2).

Задача (1), (2) исследуется методом параметризации [1].

Взяв число  $h > 0: Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ), разобьем промежутки  $[0, T]$  на равные части:

$$[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh].$$

Через  $C([0, T], h, R^{nN})$  обозначим пространство систем функций  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$  с нормой  $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|x_r(t)\|$ , где функция  $x_r: [(r-1)h, rh] \rightarrow R^n$  непрерывна и имеет конечный предел при  $t \rightarrow rh - 0, r = 1: N$ . Пространство  $C([0, T], h, R^{nN})$  является полным.

Сужение функции  $x(t)$  на  $r$ -й интервал  $[(r-1)h, rh]$  обозначим через  $x_r(t)$  и задачу (1), (2) сведем к многоточечной краевой задаче:

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = 1: N, \quad (3)$$

$$g(x_1(0), \lim_{t \rightarrow Nh-0} x_N(t)) = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s = 1: (N-1), \quad (5)$$

где (5) — условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервала.

Решением задачи (3)–(5) является система функций  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$ , где непрерывно дифференцируемая на  $[(r-1)h, rh]$  функция  $x_r(t), r = 1: N$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) при всех  $t \in [(r-1)h, rh], r = 1: N$ , и имеют место равенства (4), (5).

Обозначив через  $\lambda_r$  значение функции  $x_r(t)$  в точке  $t = (r-1)h, r = 1: N$ , введем новую неизвестную функцию  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r, t \in [(r-1)h, rh], r = 1: N$ , и от задачи (3)–(5) перейдем к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r + u_r), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = 1: N, \quad (6)$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \quad r = 1: N, \quad (7)$$

$$g(\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \rightarrow Nh-0} u_N(t)) = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = 1: (N-1). \quad (9)$$

Решением задачи (6)–(9) является пара  $(\lambda^*, u^*[t])$  с компонентами  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ ,  $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$ , где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на  $[(r-1)h, rh]$  функция  $u_r^*(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) при всех  $t \in [(r-1)h, rh]$  (при  $t = (r-1)h$  уравнению (6) удовлетворяет правосторонняя производная функции  $u_r^*(t)$ ),  $r = 1: N$ , выполняется условие  $u_r^*((r-1)h) = 0, r = 1: N$ , и для  $\lambda_1^*, \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow Nh-0} u_N^*(t), \lambda_s^* + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s^*(t), \lambda_{s+1}^*, s = 1: (N-1)$ , имеют место равенства (8), (9).

Если  $x^*(t)$  — решение задачи (1), (2), то пара  $(\lambda^*, u^*[t])$  с элементами  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)$ ,  $\lambda_r = x_r^*((r-1)h)$ ,  $r = 1: N$ ,  $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t))$ ,  $u_r^*(t) = x_r^*(t) - x_r^*((r-1)h)$ ,  $r = 1: N$ , где  $x_r^*(t)$  —  $n$ -вектор-функция, совпадающая с  $x^*(t)$  на  $[(r-1)h, rh)$ ,  $r = 1: N$ , является решением многоточечной краевой задачи с параметрами (6)–(9). И обратно — если пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$  с элементами  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$ ,  $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$  является решением задачи (6)–(9), то функция  $\tilde{x}(t)$ , определенная на  $[0, T]$  равенствами:  $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$ ,  $t \in [(r-1)h, rh)$ ,  $r = 1: N$ ,  $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + \lim_{t \rightarrow Nh-0} \tilde{u}_N(t)$ , будет решением нелинейной двухточечной краевой задачи (1), (2). Отметим, что задача с параметрами преимущественно отличается от задачи (3)–(5) наличием начальных условий (7).

При фиксированном значении параметра  $\lambda_r$  задача Коши (6), (7) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau)) d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1: N. \quad (10)$$

Подставляя вместо  $u_r(\tau)$  правую часть равенства (10) и повторяя этот процесс  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) раз, получим следующее представление функции  $u_r(t)$ :

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f\left(\tau_1, \lambda_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1: N. \quad (11)$$

Определив из (11)  $\lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t)$ ,  $r = 1: N$ , подставив в (8), (9), предварительно умножив (8) на  $h > 0$ , получим систему нелинейных уравнений относительно  $\lambda_r \in R^n$ :

$$\begin{aligned} h \cdot g\left(\lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} f\left(\tau_1, \lambda_N + \dots + \int_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N + u_N(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1\right) &= 0, \\ \lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} f\left(\tau_1, \lambda_s + \dots + \int_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s + u_s(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 - \lambda_{s+1} &= 0, \quad s = 1: (N-1), \end{aligned}$$

которую запишем в виде операторного уравнения:

$$Q_{\nu, h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \quad (12)$$

Таким образом, для нахождения параметра  $\lambda \in R^{nN}$  при фиксированном  $u[t]$  имеем систему уравнений (12), определяемую через функции  $f(t, x)$ ,  $g(\nu, w)$ , по шагу разбиения  $h > 0: Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) и числу подстановок  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ).

**Условие А.** Существуют  $h > 0: Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ),  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), при которых система нелинейных уравнений  $Q_{\nu, h}(\lambda, 0) = 0$  имеет решение  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$ , задача Коши

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r^{(0)} + u_r), \quad u_r((r-1)h) = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

имеет решение  $u_r^{(0)}(t)$  при всех  $r = 1: N$  и система функций  $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t))$  принадлежит пространству  $C([0, T], h, R^{nN})$ .

По паре  $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$  равенствами  $x^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t)$ ,  $t \in [(r-1)h, rh)$ ,  $r = 1: N$ ,  $x^{(0)}(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t \rightarrow Nh-0} u_N^{(0)}(t)$ , определим кусочно-непрерывную на  $[0, T]$  функцию  $x^{(0)}(t)$ .

Выберем числа  $\rho_\lambda > 0$ ,  $\rho_u > 0$ ,  $\rho_x > 0$  и составим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nN} : \|\lambda - \lambda^{(0)}\| = \max_{r=1:N} \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda \right\},$$

$$S_h(u^{(0)}[t], \rho_u) = \left\{ u[t] \in C([0, T], h, R^{nN}) : \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_u \right\},$$

$$S(x^{(0)}(t), \rho_x) = \left\{ x(t) \in C([0, T], R^n) : \|x - x^{(0)}\|_1 < \rho_x \right\},$$

$$G_1^0(\rho_x) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - x^{(0)}(t)\| < \rho_x\},$$

$$G_1^0(\rho_\lambda, \rho_x) = \{(v, w) \in R^{2n} : \|v - x^{(0)}(0)\| < \rho_\lambda, \|w - x^{(0)}(T)\| < \rho_x\}.$$

**Условие В.** Функции  $f(t, x)$ ,  $g(v, w)$  соответственно в  $G_1^0(\rho_x)$ ,  $G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$  непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные  $f'_x(t, x)$ ,  $g'_v(v, w)$ ,  $g'_w(v, w)$ , и выполняются неравенства  $\|f'_x(t, x)\| \leq L(t)$ ,  $\|g'_v(v, w)\| \leq L_1$ ,  $\|g'_w(v, w)\| \leq L_2$ , где  $L(t) \in C([0, T], R)$ ,  $L_1, L_2$  — постоянные.

Предположим, что имеет место условие А. За начальное приближение решения задачи (6)–(9) возьмем пару  $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$  и найдем последовательность  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , по следующему алгоритму.

**Шаг 1.** а) Из уравнения  $Q_{v,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$  найдем  $\lambda^{(1)} \in R^{nN}$ ; б) решая задачу Коши (6), (7) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ ,  $r = 1 : N$ , найдем компоненты системы функций  $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \dots, u_N^{(1)}(t))$ .

**Шаг 2.** а) Из уравнения  $Q_{v,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$  найдем  $\lambda^{(2)} \in R^{nN}$ ; б) решая задачу Коши (6), (7) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(2)}$ ,  $r = 1 : N$ , найдем компоненты системы функций  $u^{(2)}[t] = (u_1^{(2)}(t), u_2^{(2)}(t), \dots, u_N^{(2)}(t))$ . И так далее.

Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма, одновременно обеспечивающие существование изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметрами (6)–(9), устанавливает

**Теорема 1.** Пусть при некоторых  $h > 0 : Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ),  $v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ),  $\rho_\lambda > 0$ ,  $\rho_u > 0$ ,  $\rho_x > 0$ , выполняются условия А, В, матрица Якоби  $\frac{\partial Q_{v,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$  обратима для всех  $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$  и имеют место неравенства:

- 1)  $\left\| \left( \frac{\partial Q_{v,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \gamma_v(h),$
- 2)  $q_v(h) = \gamma_v(h) \max\{1, hL_2\} \max_{r=1:N} \left( \exp\left(\int_{(r-1)h}^{rh} L(t) dt\right) - \sum_{i=0}^v \frac{1}{i!} \left(\int_{(r-1)h}^{rh} L(t) dt\right)^i \right) < 1,$
- 3)  $\frac{\gamma_v(h)}{1 - q_v(h)} \|Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho_\lambda,$
- 4)  $\max_{r=1:N} \left( \exp\left(\int_{(r-1)h}^{rh} L(t) dt\right) - 1 \right) \rho_\lambda < \rho_u,$
- 5)  $\max_{p=1:v} \left\{ \rho_\lambda \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(hL_0)^i}{i!} + \rho_u \frac{(hL_0)^{p-1}}{(p-1)!} \right\} < \rho_x.$

Тогда определяемая по алгоритму последовательность пар  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , принадлежит  $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$ , сходится в  $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$  к решению  $(\lambda^*, u^*[t])$  задачи (6)–(9).

Причем любое решение задачи (6)–(9) в  $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$  изолированно.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2 из [1; 47].

Известно, что в нелинейных краевых задачах изолированность решения не только не обеспечивает его непрерывной зависимости от исходных данных, но и не сохраняет свойства разрешимости при малых изменениях  $f(t, x)$ ,  $g(v, w)$ . Например [2; 4], двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x(1)$$

имеет изолированное решение  $x = 0$ , однако задача

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \varepsilon, \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x(1)$$

не имеет решения при любом  $\varepsilon > 0$ .

В этом примере сколь угодно малое изменение правой части дифференциального уравнения приводит к несуществованию решения краевой задачи. Учитывая, что построение приближенных методов предполагает малость изменения решения при малых возмущениях исходных данных, в [1; 57] вводится определение изолированности.

**Определение.** Функция  $x^*(t)$  называется «изолированным» решением задачи (1), (2), если существует число  $\rho_0 > 0$  такое, что функции  $f(t, x)$  и  $g(v, w)$  соответственно в  $G_1^*(\rho_0) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$ ,  $G_2^*(\rho_0, \rho_0) = \{(v, w) \in R^{2n} : \|v - x^*(0)\| < \rho_0, \|w - x^*(T)\| < \rho_0\}$  непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные  $f'_x(t, x)$ ,  $g'_v(v, w)$ ,  $g'_w(v, w)$  и линеаризованная однородная двухточечная краевая задача

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y, \quad t \in [0, T], \quad y \in R^n, \quad (13)$$

$$g'_v(x^*(0), x^*(T))y(0) + g'_w(x^*(0), x^*(T))y(T) = 0 \quad (14)$$

имеет только тривиальное решение.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования «изолированного» решения нелинейной двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (2).

**Теорема 2.** Если краевая задача (1), (2) имеет «изолированное» решение, то для любого  $v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) существуют числа  $h = h(v) : Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ),  $\rho_\lambda > 0$ ,  $\rho_u > 0$ ,  $\rho_x > 0$ , при которых выполняются условия **A**, **B**, матрица Якоби  $\frac{\partial Q_{v,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$  обратима для всех  $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$  и справедливы неравенства 1)–5) теоремы 1.

*Доказательство.* Пусть  $x^*(t)$  — «изолированное» решение задачи (1), (2). Тогда, по определению, существует число  $\rho_0 > 0$  и функции  $f(t, x)$  и  $g(v, w)$  соответственно в  $G_1^*(\rho_0)$ ,  $G_2^*(\rho_0, \rho_0)$  непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные  $f'_x(t, x)$ ,  $g'_v(v, w)$ ,  $g'_w(v, w)$ . Поэтому найдутся числа  $L_0, L_1, L_2$  такие, что  $\|f'_x(t, x)\| \leq L_0$ ,  $\|g'_v(v, w)\| \leq L_1$ ,  $\|g'_w(v, w)\| \leq L_2$  для всех  $(t, x) \in G_1^*(\rho_0)$ ,  $(v, w) \in G_2^*(\rho_0, \rho_0)$ .

Отрезок  $[0, T]$  разобьем на равные части с шагом  $h > 0 : Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) и рассмотрим эквивалентную многоточечную краевую задачу с параметрами. Пара  $(\lambda^*, u^*[t])$  с элементами  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ ,  $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)) \in C([0, T], h, R^{nN})$ , где  $\lambda_r^* = x^*((r-1)h)$ ,  $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*((r-1)h)$ ,  $t \in [(r-1)h, rh]$ ,  $r = 1 : N$ , будет решением задачи (6)–(9).

Так как  $x^*(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению и  $f(t, x^*(t))$  непрерывна на  $[0, T]$ , то найдется число  $M > 0$  такое, что  $\|\dot{x}^*(t)\| \leq M$  и для каждого  $r = 1 : N$  справедлива оценка

$$\|u_r^*(t)\| = \|x^*(t) - x^*((r-1)h)\| \leq \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\dot{x}^*(t)\| h \leq Mh, \quad t \in [(r-1)h, rh]. \quad (15)$$

Из существования только тривиального решения однородной краевой задачи (13), (14) следует однозначная разрешимость неоднородной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f'_x(t, x^*(t))y + \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad y \in R^n, \\ g'_v(x^*(0), x^*(T))y(0) + g'_w(x^*(0), x^*(T))y(T) &= d, \end{aligned}$$

где  $\varphi(t) \in C([0, T], R^n)$ . Тогда, согласно теореме 4 [3; 61], существует шаг  $h_0 > 0$ , что для всех  $h \in (0, h_0]: Nh = T$  матрица  $Q_v^*(h) = \frac{\partial Q_{v,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}$  обратима и  $\left\| (Q_v^*(h))^{-1} \right\| \leq \frac{\gamma_v}{h}$ , где  $\gamma_v$  — const, не зависящая от  $h$ .

Возьмем число  $\varepsilon > 0$  удовлетворяющим неравенству  $\varepsilon \gamma_v \leq 0.25$  и, используя равномерную непрерывность  $f'_x(t, x)$ ,  $g'_v(v, w)$ ,  $g'_w(v, w)$ , найдем  $\rho_\lambda^* > 0$ ,  $\rho_u^* > 0$  такие, что  $\max_{p=1:v} \left\{ \rho_\lambda^* \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(hL_0)^i}{i!} + \rho_u^* \frac{(hL_0)^{p-1}}{(p-1)!} \right\} = \rho^* \in (0, \rho_0]$  и  $\left\| \frac{\partial Q_{v,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{v,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right\| \leq \varepsilon$  для всех  $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S_h(u^*[t], \rho_u^*)$ .

Применяя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [4; 142], получим, что матрица Якоби  $\partial Q_{v,h}(\lambda, u) / \partial \lambda$  ограниченно обратима и  $\left\| (\partial Q_{v,h}(\lambda, u) / \partial \lambda)^{-1} \right\| \leq \frac{4\gamma_v}{3h}$  для всех  $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S_h(u^*[t], \rho_u^*)$ .

Выберем  $h_1 \in (0, h_0]: Nh_1 = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) так, чтобы выполнялись неравенства

$$Mh_1 \leq \frac{\rho_u^*}{2}, \quad (16)$$

$$\frac{4\gamma_v}{3} M \max\{1, h_1 L_2\} \frac{(h_1 L_0)^v}{v!} < \frac{\rho_\lambda^*}{2}, \quad (17)$$

$$\frac{4\gamma_v}{3} M \max\{1, h_1 L_2\} \frac{(h_1 L_0)^v}{v!} (e^{h_1 L_0} - 1) < \frac{\rho_u^*}{2}. \quad (18)$$

Покажем, что  $S_h(0, \rho_u^*/2) \subset S_h(u^*[t], \rho_u^*)$ . Действительно, если  $u[t] \in S_h(0, \rho_u^*/2)$  то, в силу (15), (16),

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 \leq \|u[\cdot]\|_2 + \|u^*[\cdot]\|_2 < \frac{\rho_u^*}{2} + \frac{\rho_u^*}{2} = \rho_u^*,$$

т.е.  $u[t] \in S_h(u^*[t], \rho_u^*)$ .

При  $h \in (0, h_1]: Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$Q_{v,h}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \quad (19)$$

Так как матрица Якоби  $\frac{\partial Q_{v,h}(\lambda, 0)}{\partial \lambda}$  равномерно непрерывна в  $S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ , оценка

$$\left\| \left( \frac{\partial Q_{v,h}(\lambda, 0)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{4\gamma_v}{3h}$$
 справедлива для всех  $\lambda \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ . Ввиду (15), (17) и равенства  $Q_{v,h}(\lambda^*, u^*) = 0$

имеем, что

$$\frac{4\gamma_v}{3h} \|Q_{v,h}(\lambda^*, 0)\| = \frac{4\gamma_v}{3h} \|Q_{v,h}(\lambda^*, 0) - Q_{v,h}(\lambda^*, u^*)\| \leq \frac{4\gamma_v}{3h} \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} Mh < \rho_\lambda^*.$$

Поэтому, согласно теореме 1 из [1, с. 41], система уравнений (19) имеет решение  $\lambda^{(0)} \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$  и

$$\|\lambda^{(0)} - \lambda^*\| \leq \frac{4\gamma_v}{3h} \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} Mh < \rho_\lambda^*. \quad (20)$$

Решение задачи Коши (6), (7) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ ,  $r = 1:N$ , найдем методом последовательных приближений:  $u_r^{(0,0)}(t) = u_r^*(t)$ ,

$$u_r^{(0,m+1)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0,m)}(\tau)) d\tau, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1:N.$$

Для любого  $m = 0, 1, 2, \dots$  функция  $u_r^{(0,m+1)}(t)$  имеет конечный левосторонний предел, равный  $\int_{(r-1)h}^{rh} f(t, \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0,m)}(t)) dt$ ,  $r = 1:N$ , и система функций  $u^{(0,m+1)}[t] = (u_1^{(0,m+1)}(t), u_2^{(0,m+1)}(t), \dots, u_N^{(0,m+1)}(t))$  принадлежит пространству  $C([0, T], h, R^{nN})$ .

Из неравенств

$$\begin{aligned} \|u_r^{(0,1)}(t) - u_r^{(0,0)}(t)\| &= \|u_r^{(0,1)}(t) - u_r^*(t)\| = \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^*(\tau)) d\tau - \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^* + u_r^*(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq L_0(t - (r-1)h) \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|, \\ \|u_r^{(0,2)}(t) - u_r^{(0,1)}(t)\| &\leq \int_{(r-1)h}^t L_0 \|u_r^{(0,1)}(\tau) - u_r^{(0,0)}(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \int_{(r-1)h}^t L_0^2(\tau - (r-1)h) d\tau \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\| = \frac{(L_0(\tau - (r-1)h))^2}{2!} \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|, \\ \|u_r^{(0,m+1)}(t) - u_r^{(0,m)}(t)\| &\leq \frac{(L_0(\tau - (r-1)h))^{m+1}}{(m+1)!} \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = 1 : N, \end{aligned}$$

следует оценка

$$\|u^{(0,m+1)}[\cdot] - u^{(0,m)}[\cdot]\|_2 \leq \frac{(L_0 h)^{m+1}}{(m+1)!} \|\lambda^{(0)} - \lambda^*\|, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда, учитывая полноту пространства  $C([0, T], h, R^{nN})$ , получим сходимость  $\{u^{(0,m)}[t]\}$  к  $u^{(0)}[t] \in C([0, T], h, R^{nN})$  при  $m \rightarrow \infty$  и

$$\|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 \leq \frac{4\gamma_v}{3} M \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} (e^{hL_0} - 1) < \frac{\rho_u^*}{2}. \quad (21)$$

Таким образом, имеют место условие **A** и оценки (20), (21).

Теперь возьмем  $\rho_\lambda = \rho_\lambda^* / 2$ ,  $\rho_u = \rho_u^* / 2$ ,  $\rho_x = \max_{p=1:v} \left\{ \rho_\lambda \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(hL_0)^i}{i!} + \rho_u \frac{(hL_0)^{p-1}}{(p-1)!} \right\}$  и выберем

$h_2 \in (0, h_1] : Nh_2 = T$ , удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{4\gamma_v}{3h_2} \max\{1, h_2L_2\} \left( e^{h_2L_0} - \sum_{i=0}^{v-1} \frac{(h_2L_0)^i}{i!} \right) \leq \frac{1}{3}, \quad (22)$$

$$2\gamma_v M \max\{1, h_2L_2\} \frac{(h_2L_0)^v}{v!} \left( \frac{4\gamma_v}{3h_2} \max\{1, h_2L_2\} \frac{(h_2L_0)^v}{v!} (e^{h_2L_0} - 1) + 1 \right) < \rho_\lambda, \quad (23)$$

$$2\gamma_v M \max\{1, h_2L_2\} \frac{(h_2L_0)^v}{v!} \left( \frac{4\gamma_v}{3h_2} \max\{1, h_2L_2\} \frac{(h_2L_0)^v}{v!} (e^{h_2L_0} - 1) + 1 \right) (e^{h_2L_0} - 1) < \rho_u. \quad (24)$$

Если  $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$ , то на основании (17), (18), (20), (21) получим:

$$\|\lambda - \lambda^*\| \leq \|\lambda - \lambda^{(0)}\| + \|\lambda^{(0)} - \lambda^*\| \leq \rho_\lambda + \frac{4\gamma_v}{3h} \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} Mh < \rho_\lambda^*,$$

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 \leq \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 \leq \rho_u + \frac{4\gamma_v}{3} M \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} (e^{hL_0} - 1) < \rho_u^*,$$

т.е.  $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \subset S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ ,  $S_h(u^{(0)}[t], \rho_u) \subset S_h(u^*[t], \rho_u^*)$  при всех  $h \in (0, h_2]$ . Поэтому в  $G_1^*(\rho_0)$ ,  $G_2^*(\rho_0, \rho_0)$  выполняется условие **B**.

Неравенство 1) теоремы 1 выполняется с постоянной  $\gamma_v(h) \leq \frac{4\gamma_v}{3h}$ . Тогда

$$q_v(h) = \frac{4\gamma_v}{3h} \max\{1, hL_2\} \left( e^{hL_0} - \sum_{i=0}^{v-1} \frac{(hL_0)^i}{i!} \right)$$

и в силу (22)  $q_v(h) \leq \frac{1}{3}$  при  $h \in (0, h_2]$ .

Принимая во внимание оценки

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq \|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 + \|u^*[\cdot]\|_2 \leq Mh \left( \frac{4\gamma_v}{3h} \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} (e^{hL_0} - 1) + 1 \right),$$

$$\|Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| = \|Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) - Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, 0)\| \leq \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2$$

и неравенства (23), (24), получим следующее:

$$\frac{\gamma_v(h)}{1 - q_v(h)} \|Q_{v,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| \leq 2\gamma_v M \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} \left( \frac{4\gamma_v}{3h} \max\{1, hL_2\} \frac{(hL_0)^v}{v!} (e^{hL_0} - 1) + 1 \right) < \rho_\lambda.$$

Таким образом, при выборе  $\rho_\lambda = \rho_\lambda^* / 2$ ,  $\rho_u = \rho_u^* / 2$ ,  $\rho_x = \max_{p=1:v} \left\{ \rho_\lambda \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(hL_0)^i}{i!} + \rho_u \frac{(hL_0)^{p-1}}{(p-1)!} \right\}$  все условия теоремы 1 выполняются для любого  $h \in (0, h_2]$ :  $Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ). Теорема 2 доказана.

Теоремы настоящей работы отличаются от аналогичных утверждений [1] условием А. Если задача (1), (2) имеет "изолированное" решение  $x^*(t)$ , то всегда найдется шаг  $h > 0$ :  $Nh = T$  ( $N = 1, 2, \dots$ ), число  $\rho_\lambda > 0$ , при которых система уравнений (19) имеет решение  $\lambda^{(0)} \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ , где  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ ,  $\lambda_r^* = x^*((r-1)h)$ ,  $r = 1 : N$ .

### References

1. *Dzhumabayev D.S., Temesheva S.M.* A Parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47. — № 1. — P. 39–63.
2. *Kiguradze I.T.* Boundary value problems for systems of ordinary differential equations. "Modern problems of mathematic. Newest achievements (Itogi nauki i tekhniki. VINITI AN SSSR)." — M., 1987. — Vol. 30. — P. 3–103.
3. *Dzhumabaev D.S.* Indications of unique solvability of linear boundary value problems for ordinary differential equations // J. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1989. — Vol. 29. — № 1. — P. 50–66.
4. *Trenogin V.A.* Functional analysis. — M.: Nauka, 1980. — 496 p.