УДК 517. 928

М.Азимбаев[1], М.Маматкулова[1], Б.Т.Калимбетов[2]

[1]Ошский государственный университет, Республика Кыргызстан;
[2]Международный Казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясауи, Туркестан (E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений при отсутствии нулей собственных значений

В статье предложен алгоритм исследования сингулярно-возмущенных дифференциальных систем уравнений в случае отсутствия нулевых спектров предельного оператора. Для существования и единственности решения задачи использован метод последовательных приближений. Предложен конструктивный подход построения мажорантного сходящегося ряда для функционального асимптотического ряда. Доказана равномерная и абсолютная сходимость асимптотического ряда по степеням малого параметра. Приведены оценка и доказательства сходимости последовательных приближений.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения, асимптотический ряд, равномерная и абсолютная сходимость, собственные значения.

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[f(t) + B(t)x(t,\varepsilon)\right] + g\left(t, x(t,\varepsilon)\right); \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad \left\|x^0(\varepsilon)\right\| = O(\varepsilon), \tag{2}$$

где $D(t) = diag\left(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\right)$, $f(t) = colon\left(f_1(t), f_2(t)\right)$, $B(t) = \left(b_{jk}(t)\right)_1^2$, $g\left(t, x(t,\varepsilon)\right) = colon\left(g_1(t,x), g_2(t,x)\right)$, $g_j(t,0) \equiv 0$, $j = 1,2$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $[t_0, T_0]$ — отрезок действительной оси, $t_0 < T_0$,

$$H_0 = \left\{(t_1,t_2):\ t_0 \le t_1 \le T_0,\ \ -\infty < t_2 < +\infty\right\} \subset S =$$
$$= \left\{(t_1,t_2):\ t_0 - \gamma < t_1 < T_0 + \gamma,\ -\infty < t_2 < +\infty,\ 0 < \gamma << 1\right\};$$
$$\Delta(t,x) = \left\{(t,x) = (t,x_1,x_2):\ \ t \in S;\ \left|x_j\right| < \delta \ \ (j = 1,2),\ \ 0 < \delta - const\right\};$$

$\Phi(S_0)$ — пространство аналитических функций в S.

Решение $x(t,\varepsilon) = colon\left(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)\right)$ будем искать в классе $x_k(t,\varepsilon) \in \Phi(S)$, $k = 1,2$, по t.

Пусть (i). $\lambda_k(t) \in \Phi(S)$, $f_k(t) \in \Phi(S)$, $b_{kj}(t) \in \Phi(S)$, $g_k(t,x) \in \left(\Delta(t,x)\right)$, $k,j = 1,2$; в области $\Delta(t,x)$ имеет место неравенство $\left\|g(t,x) - g(t,\tilde{x})\right\| \le M\left\|x - \tilde{x}\right\|\left(\max\{\|x|,|\tilde{x}\|\}\right)^{\beta}$, $M > 0$, $\beta \ge 1$.

(ii). $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$, где $\alpha(t), \beta(t)$ — действительные функции, причем $\alpha(t) < 0$ при $t_0 \le t < a_0$; $\alpha(t) > 0$ при $a_0 < t \le T_0$, $\alpha(a_0) = 0$, но $\beta(a_0) \ne 0$. $t = t_1 + it_2$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, где t_1, t_2, τ_1, τ_2 — действительные переменные; $u_k(t_1,t_2) = \mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_k(s)ds$, $k = 1,2$, $H_0 = \left\{(t_1,t_2);\ \ u_k(t_1,t_2) \le 0,\ \ k = 1,2\right\}$; $\lambda_k(t)$ не имеет нулей в области H_0 и $u_1(t_0,t_2) = u_1(T_0,t_2) = 0$ при $-\infty < t_2 < +\infty$.

(iii). Будем предполагать, что если (t_1,t_2) — внутренняя точка области H_0, то гармоническая функция $Jm\lambda_1(t_1,t_2) > 0$, и если (t_1,t_2) — граничная точка области H_0, то может иметь место $Jm\lambda_1(t_1,t_2) = 0$.

Сначала исходную задачу (1–2) заменим на эквивалентную интегро-дифференциальному уравнению:

$$x(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\left[B(\tau)x(\tau,\varepsilon) + f(\tau)\right]d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)g\left(\tau, x(\tau,\varepsilon)\right)d\tau, \tag{3}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}D(s)ds\right)$.

Как в работах [1, 2], рекуррентно определим следующие функции:

$$x^{(0)}(t,\varepsilon)\equiv 0;$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau;$$

$$. \qquad . \qquad .$$

$$x^{(k+1)}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)x^{(k)}(t,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\Big[g\Big(\tau,X^{(k)}(\tau,\varepsilon)\Big)-g\Big(\tau,X^{(k-1)}(\tau,\varepsilon)\Big)\Big]; \qquad (4)$$

$$X^{(k)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{k}x^{(m)}(t,\varepsilon).$$

Тогда решение задачи (1, 2) представимо в виде:

$$x(t,\varepsilon)=x^{(1)}(t,\varepsilon)+x^{(2)}(t,\varepsilon)+...+x^{(k)}(t,\varepsilon)+... \qquad (5)$$

Здесь $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ определяется как первое приближение из уравнения (3), а $x^{(k)}(t,\varepsilon)$, $k=2,3,...$ не является обычным последовательным приближением уравнения (3) (последовательно определяется по формуле (4)).

Задача состоит в том, как построить мажорантный сходящийся ряд для функционального ряда (5) при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0-const;\quad t\in H_0$.

Из [3] следует, что $\lim\limits_{t_2\to-\infty}u_1(t_1,t_2)=0$ $\left(\lim\limits_{t_2\to+\infty}u_2(t_1,t_2)=0\right)$ или $\lim\limits_{t_2\to+\infty}u_1(t_1,t_2)=0$ $\left(\lim\limits_{t_2\to-\infty}u_2(t_1,t_2)=0\right)$ при фиксированном t_1.

Числа p,q будем выбирать так, чтобы для них имело место неравенство: $0<p<q<1$.

Заметим, что из равенства

$$u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon^p\quad\left(u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon^q;\ u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon\right)$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=t_0,\ \ \varepsilon=0)$ однозначно определяется

$$t_1^*=t_0+\delta(\varepsilon)\quad\left(t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon);\quad t_1^*=t_0+\gamma_1(\varepsilon)\right),$$

где $\delta(\varepsilon)\ge 0$ $\left(\gamma(\varepsilon)\ge 0;\quad \gamma_1(\varepsilon)\ge 0\right)$ — непрерывная функция от ε при

$$0<\varepsilon\le\varepsilon_0\ (\varepsilon_0>0):\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0\ \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0;\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_1(\varepsilon)=0\right).$$

Здесь все условия существования неявной функции выполняются. Аналогично из равенства в некоторой окрестности точки $\left(t_1^*=T_0,\ \varepsilon=0\right)$ однозначно определяется $t_1^*=T_0-\tilde\delta(\varepsilon)$ $\left(t_1^*=T_0-\tilde\gamma(\varepsilon);\ \ t_1^*=T_0-\tilde\gamma_1(\varepsilon)\right)$, где $\tilde\delta(\varepsilon)\ge 0$ $\left(\tilde\gamma(\varepsilon)\ge 0;\quad \tilde\gamma_1(\varepsilon)\ge 0\right)$ — непрерывная функция от ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde\delta(\varepsilon)=0\ \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde\gamma(\varepsilon)=0;\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}\tilde\gamma_1(\varepsilon)=0\right).$$

Для оценки функций $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ $(n=2,...,\ k=1,2)$ будем использовать основную лемму 4 работы [4]. В рассматриваемом случае все условия этой леммы выполняются. Поэтому имеет место

Лемма. Пусть линия уровня $(\tilde N_1)$ соединяет точки $\left(t_0+\gamma(\varepsilon),0\right),\left(T_0-\tilde\gamma(\varepsilon),0\right)$; линия уровня $(\tilde N_2)$ — точки $\left(t_0+\delta(\varepsilon),0\right),\left(T_0-\tilde\delta(\varepsilon),0\right)$; а линия уровня $(\tilde{\tilde N})$ соединяет точки $\left(t_0+\gamma_1(\varepsilon),0\right)$, $\left(T_0-\tilde\gamma_1(\varepsilon),0\right)$. Через точки $\left(T_0-\tilde\delta(\varepsilon),0\right)$ проведем прямую, параллельную оси t_2. Эта прямая имеет единственную точку пересечения $\left(T_0-\tilde\delta(\varepsilon),t_{21}\right)$ с линией уровня $(\tilde N_1)$ (условие $Jm\lambda_1(t)>0$).

Введем в рассмотрение полосу $\ddot I$, ограниченную линиями уровня $(\tilde N_1)$ и $(\tilde N_q)$, отрезком действительной оси $\left[t_0+\gamma(\varepsilon),T_0-\tilde\delta(\varepsilon)\right]$ и отрезком, соединяющим точки $\left(T_0-\tilde\delta(\varepsilon),0\right),\left(T_0-\tilde\delta(\varepsilon),t_{21}\right)$.

На полосе $\ddot{I}$ рассмотрим уравнение

$$u_1(t_1,t_2)=at_1+b, \tag{6}$$

где $a=\dfrac{\varepsilon^q-\varepsilon^p}{T_0-t_0-\gamma(\varepsilon)-\tilde{\delta}(\varepsilon)}$; $b=\dfrac{\varepsilon^p\left[t_0+\gamma(\varepsilon)\right]-\varepsilon^q\left[T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon)\right]}{T_0-t_0-\gamma(\varepsilon)-\tilde{\delta}(\varepsilon)}$.

На полосе Π существует непрерывно дифференцируемая кривая (K_0), соединяющая точки $\left(t_0+\gamma(\varepsilon),0\right)$, $\left(T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon),0\right)$ и имеющая вид уравнения (6). Причем из (6) однозначно определяется $t_2=\varphi(t_1)$ с областью существования $t_0+\gamma(\varepsilon)\le t_1\le T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon)$ и $u_1\left(t_1,\varphi(t_1)\right)$ убывает при $t_0+\gamma(\varepsilon)\le\ t_1\le T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon)$.

Возьмем кривую (K_0^*), симметричную к (K_0). Область, ограниченную кривыми (K_0) и (K_0^*), обозначим $K_\varepsilon\subset H_0$. Еще возьмем кривую (C^*), симметричную к $(\bar{C})$. Ограниченную кривыми $(\bar{C})$ и (C^*) область обозначим через $\bar{K}\subset H_0$ $(K_\varepsilon\subset\bar{K})$.

Путь интегрирования l для $x^{(n)}(t,\varepsilon)$, $n=1,2,...$ определяется в зависимости от того, к какому множеству принадлежит точка (t_1,t_2).

Пусть $\tilde{K}=\Delta_1\cup\bar{K}\cup\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{K}_\varepsilon=\Delta\cup K_\varepsilon\cup\tilde{\Delta}$;

$$\Delta_1=\left\{(t_1,t_2):\ t_0\le t_1\le t_0+\gamma_1(\varepsilon);\ t_2=0\right\};$$
$$\tilde{\Delta}_1=\left\{(t_1,t_2):\ T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon)\le t_1\le T_0;\ t_2=0\right\};$$
$$\tilde{\Delta}=\left\{(t_1,t_2):\ \ T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon)\le t_1\le T_0;\ t_2=0\right\}.$$

Согласно результатам [3] следует, что при $(t_1,t_2)\in\tilde{K}$ имеют место оценки:

$$\left|x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon;\quad \left|x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon,$$

где $c>0-const$.

Путь интегрирования l при $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)$, $n=2,3,...$ определяется, как было отмечено выше, в зависимости от расположения точки (t_1,t_2). В нашем случае l не принадлежит ни какому из перечисленных выше множеств.

Если $(t_1,t_2)\in\Delta$ $(t=t_1,\ t_2=0)$, то l состоит из прямой, соединяющей точку $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,0)$ $\left(t_0\le t_1\le t_0+\gamma(\varepsilon)\right)$. В этом случае $\operatorname{Re}\lambda_{k1}(t)\le-\alpha,\quad \alpha>0$.

Если $(t_1,t_2)\in K_\varepsilon$, то $l=\bigcup\limits_{k-1}^{3}l^{(k)}$, где $l^{(1)}$ — отрезок прямой, соединяющей точку $(t_0,0)$ с точкой $\left(t_0+\gamma(\varepsilon),0\right)$; $l^{(2)}$ — отрезок кривой (K_0), соединяющей точку $\left(t_0+\gamma(\varepsilon),\,0\right)$ с точкой $\left(t_1,t_2^*=\tilde{\varphi}(t_1,\varepsilon)\right)$; $l^{(3)}$ — отрезок прямой, соединяющей точку (t_1,t_2^*) с точкой (t_1,t_2). Здесь $t_2^*=\varphi(t_1,\varepsilon)$ определяется из соотношения $u_1(t_1,t_2^*)=-\beta(\varepsilon)$, где $\varepsilon\le\beta(\varepsilon)\le\varepsilon^p$.

Для $x_2^{(n)}(t,\varepsilon)$, $n=2,3,...$ путь интегрирования l^* симметричен для l относительно действительной оси.

Справедлива оценка

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon(c\varepsilon^{p_0})^{k-1},\ \ j=1,2,\ \ k=1,2,..., \tag{7}$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая ни от k, ни от ε; $p_0=1-p-q$; $0<p<q<{}^1\!/_2$.

Итак, нами доказана следующая

Теорема. При выполнении условий (i), (ii), (iii) решение задачи (1)–(2) существует, единственно на $\Delta\cup K_\varepsilon$ и имеет место оценка (7), т.е. функциональный ряд (5) при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0-const$, $t\in\Delta\cup K_\varepsilon$ сходится равномерно и абсолютно.

Примечание. Если заменить величины $-\varepsilon^p$, $-\varepsilon^q$ на $2\alpha_0(\varepsilon)$, $\alpha_0(\varepsilon)$ соответственно, то оценка (7) имеет другой вид. Здесь $\alpha_0(\varepsilon)=\varepsilon\ln\varepsilon$ при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0-const$, $\alpha_0(0)=0$.

Список литературы

1 *Калимбетов Б., Маматкулова М.* Асимптотические поведения решений сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости // Вестн. КарГУ. Сер. Математика. — 2012. — № 4 (68). — Караганда, 2012. — С. 55–60.

2 *Алыбаев К.С.* Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: Дис. ... д-ра физ-мат. наук: 01.01.02. — Жалал-Абад, 2001. — 376 с.

3 *Каримов С.* Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений»: Дис. ... д-ра физ-мат. наук: 01.01.02. — Ош, 1980. — 260 с.

М.Азимбаев, М.Маматкулова, Б.Т.Қалимбетов

Сингулярлы-ауытқыған дифференциалдық теңдеулер жүйесінің меншікті мәндерінің нөлдері болмаған жағдайдағы бірқалыпты жуықтама шешімі

Мақалада шектік оператордың нөлдік спектрлері болмаған жағдайдағы сингулярлы-ауытқыған дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеудің алгоритмі ұсынылған. Есептің шешімі бар және жалғыз болуы үшін біртіндеп жуықтау әдісі қолданылған. Асимптотикалық функционалдық қатар үшін жинақталатын мажоранталушы қатардың құрылуына конструктивтік ұсыныс жасалған. Кіші параметрдің дәрежелері бойынша асимптотикалық қатардың бірқалыпты және абсолютті жинақтылығы дәлелденген. Біртіндеп жуықтаудың жинақтылығының дәлелденуі мен бағалануы келтірілген.

M.Azimbayev, M.Mamatkulova, B.T.Kalimbetov

Uniform approximation of singularly perturbed systems of differential equations in the absence of zero eigenvalues

In this work suggest algorithm study singularly perturbed differential systems equations in absence zero-point spectrum of limit operator. For existence and uniqueness solutions the method successive approximations. We propose constructive approach building convergent majorant series for function of the asymptotic series. Prove uniform and absolute convergence of the asymptotic series in small parameter. The assessment evidence and convergence of successive approximations.

References

1 Kalimbetov B., Mamatqulova M. *Asymptotic behavior solutions singularly perturbed differential equations in case change stability* // Bull. of KarSU. Ser. Mathematics, 2012, № 4 (68), Karaganda, 2012, p. 55–60.

2 Alybaev K.S. *The method line-level research singularly perturbed equations when the condition of stability:* Dissertation for obtaining of scientific degree doctor of physical-mathematical sciences by speciality: 01.01.02. Jalal-Abad, 2001, 376 p.

3 Karimov S. *Asymptotic behavior solutions certain classes differential equations with a small parameter in case change stability in plane rest point of «fast motion»*: Dissertation for obtaining of scientific degree doctor of physical-mathematical sciences by speciality: 01.01.02, Osh, 1980, 260 p.