Шакиева А.Т., Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, факультет математики и информационных технологий, гр.ММатГ – 64, магистрант.
(Научный руководитель — PhD*, доцент Космакова М. Т.)*

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В БЕСКОНЕЧНОМ ДВУГРАННОМ УГЛЕ

Введение

В бесконечном двугранном угле рассматривается первая краевая задача для уравнения теплопроводности. Задача сводится к одномерной задаче, соответствующая однородной задаче, которая сводится к сингулярному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Показано, что поставленная однородная краевая задача имеет нетривиальное решение.

В настоящее время существуют актуальные вопросы, связанные с математическим моделированием теплофизических процессов в электрической дуге сильноточных расцепляющих устройств. Одним из инструментов описания физических процессов в дуге является уравнение теплопроводности, которое учитывает влияние тепловых источников в дуге и эффект сжатия осевого сечения дуги в катодной области до катодного пятна. Диаметр катодного пятна на несколько порядков меньше диаметра сечения развернутого столба дуги, что позволяет рассматривать его, как математическую точку. Область решения меняется со временем в соответствии с законом, определяемым условиями закрытия-открытия контактов. В начальный момент времени контакты находятся в закрытом состоянии, и нет области решения проблемы. С математической точки зрения проблематичность рассматриваемой задачи заключается именно в наличии движущейся границы и вырожденности области решения в начальный момент.

1. Постановка краевой задачи

В области $Q=\{(x_1;x_2;t): \quad 0<x_1<t; \quad -\infty<x_2<+\infty, \quad t>0\}$; *(см. рисунок 1) найти решение уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 u}{x_2^{\ 2}}\right)+f(x_1;x_2;t), \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u\big|_{x_1=0}=0; \quad u\big|_{x_1=t}=0 \qquad (2)$$

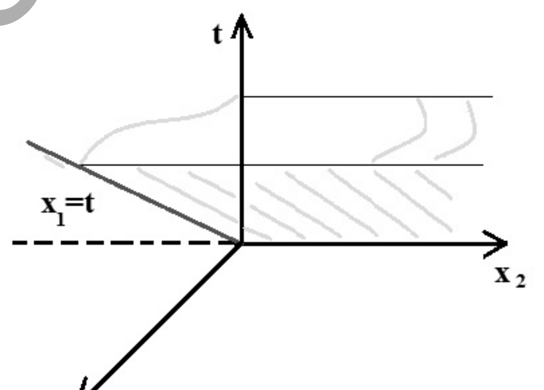

Рисунок 2. Область Q

Граница области Q движется с постоянной скоростью.

2. Сведение задачи (1) – (2) к одномерной краевой задаче с параметром

К задаче (1) – (2) применяем преобразование Фурье по формуле

$$\widetilde{u}(x_1;s,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-isx_2}u(x_1,x_2,t)dx_2\,. \qquad (3)$$

Затем

$$F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}\right]=(is)^2\widetilde{u}(x_1,s,t)=-s^2\widetilde{u}(x_1,s,t),$$

тогда в пространстве изображений задача (1) – (2) формулируется следующим образом:

В области $\widetilde{Q}=\{(x_1,s,t):\quad 0<x_1<t,\quad -\infty<s<+\infty;\quad t>0\}$ найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x_1{}^2}-a^2s^2\widetilde{u}(x_1,s,t)+\widetilde{f}(x_1,s,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\widetilde{u}\big|_{x_1=0}=0;\qquad \widetilde{u}\big|_{x_1=t}=0. \tag{5}$$

Замена преобразованной функции

$$\widetilde{u}(x_1;s,t)=e^{-a^2s^2t}w(x_1;t) \tag{6}$$

приводит задачу (4) – (5) к задаче вида:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}+e^{a^2s^2t}\widetilde{f}(x_1;s,t) \tag{7}$$

$$w\big|_{x_1=0}=0;\quad w\big|_{x_1=t}=0 \tag{8}$$

В работе [1] была исследована первая краевая задача теплопроводности в вырождающейся области (области с подвижной границей):

В области $G=\{(x;t):\ t>0,\ 0<x<t\}$ *(см. рисунок 2) найти решение уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=t}=0. \tag{10}$$

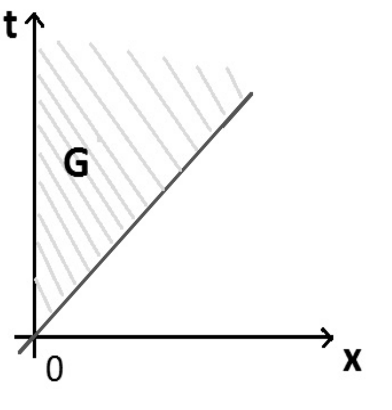

Рисунок 2. Область *G*

Решение задачи (9) – (10) было представлено в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя:

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)\,d\tau+\\&+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)\,d\tau.\end{aligned} \tag{11}$$

Известно, что функция (11) удовлетворяет уравнению теплопроводности для любого $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ [2].

Задача (9) – (10) сводится к интегральному уравнению:

$$\varphi(t) - \int_0^t K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = 0\,, \tag{12}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right) + \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right\}.$$

Особенность ядра $\mathrm{K}(t,\tau)$ уравнения (12) определяется свойствами:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau = 1,\ \lim_{t\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)\,d\tau = 1. \tag{13}$$

Методом Карлемана-Векуа решение интегрального уравнения (12) сводится к решению неоднородного уравнения Абеля.

Задача (9) – (10) и сопряженная задача исследуются в определенных весовых пространствах, найдены классы единственности их решений, показано Нетерово свойство поставленной задачи [3] – [4].

Доказано, что

Теорема 1. *Функция*

$$\varphi(t) = C\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{t}{4a^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a}erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right\}$$

где $erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz$*, является решением интегрального уравнения (12) в весовом классе функции*

$$\sqrt{t}\cdot\exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right)\cdot\varphi(t)\in L_\infty(0,+\infty).$$

Особенность или сингулярность полученного интегрального уравнения заключается в свойствах (13) ядра $K(t,\tau)$ и выражается в том, что соответствующее неоднородное уравнение не может быть решено методом последовательных приближений [5]. Свойства (13) указывают на "несжимаемость" ядра интегрального уравнения (12).

3. Основной результат

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), т.е. $f(x_1;x_2,t)\equiv 0$ $\Rightarrow \widetilde{f}(x_1,s,t)\equiv 0$ в уравнениях (4) и (7) в силу преобразования (3). Тогда решаем однородную задачу:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial {x_1}^2};$$

$$w\big|_{x_1=0} = 0;\quad w\big|_{x_1=t} = 0$$

в области $\widetilde{Q} = \{(x_1,s,t):\ \ 0<x_1<t,\ \ -\infty<s<+\infty;\ \ t>0\}$ сводится к решению сингулярного интегрального уравнения:

$$\varphi(t) - \int_0^t \mathrm{K}(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = 0\,, \tag{14}$$

где

$$\mathrm{K}(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right)\right\}.$$ *(см. рисунок 3)*

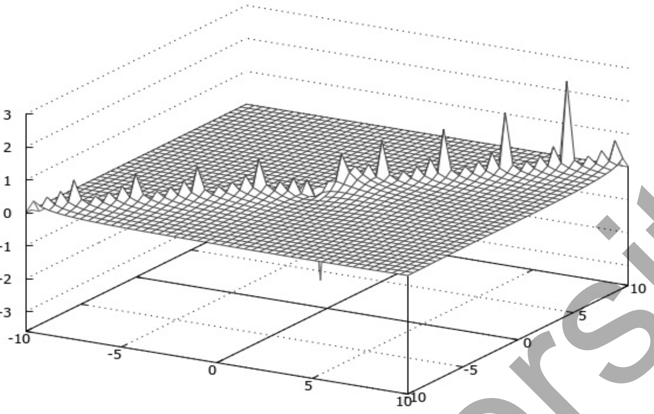

Рисунок 3. Функция $\mathrm{K}(t,\tau)$

Заметим, что функция $\mathrm{K}(t,\tau)$ ограничена при любых (t,τ).

Учитывая (11), решение однородной задачи, соответствующей задаче (7) - (8), можно записать в виде:

$$w(x_1;t)=\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x_1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x_1{}^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x_1-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{(x_1-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau; \tag{15}$$

где

$$\nu(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau .$$

Здесь $\varphi(t)$ решение интегрального уравнения (14), которое по теореме 1 имеет вид:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{t}{4a^2}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2a}erf\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2a} \tag{16}$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Нетривиальное решение однородной краевой задачи, соответствующее задаче (1) - (2), имеет вид*

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{isx_2}\tilde{u}(x_1;s,t)ds,$$

где $\tilde{u}(x_1;s,t)=e^{-a^2s^2t}w(x_1;t)$, *а функция* $w(x_1;t)$ *имеет представление (15), и определяется по формуле (16).*

Замечание. К уравнению (14) также сводится вторая краевая задача теплопроводности [6], поставленная в области $G=\{(x;t):\ t>0,\ \ 0<x<t\}$. Постановки краевых задач теплопроводности с другими граничными условиями и их исследование проведено в работах [7] – [8].

Список использованной литературы

1. Kosmakova M.T. On an integral equation of the Dirichlet problem for the heat equation in the degenerating domain // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, 2016, No.1 (81), P. 62-67.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

3. Amangaliyeva M.M., Dzhenaliev M.T., KosmakovaM.T., RamazanovM..On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain // Siberian Mathematical Journal. - 2015. – V. 56, No.6. – P. 982- 995.

4. Jenaliyev, Muvasharkhan; Amangaliyeva, Meiramkul; Kosmakova, Minzilya; Ramazanov, Murat. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary Value Problems, SEP 25 2014, 2014:213. doi:10.1186/s13661-014- 0213-4.

5. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Ведение в теорию – М.: Наука. – 1975. – 304 с.р.

6. Dzhenaliyev M.T., Kalantarov V.K., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On the second boundary value problem for the equation of heat conduction in an unbounded plane angle // ВестникКарГУ. Серияматематика, 2014, №4 (76), С. 47-56.

7. Murat I. Ramazanov, Minzilya Kosmakova, Zhanar M. Tuleutaeva, Aidana T. Shakieva. On a boundary value problem of heat conduction in a dihedral angle // Education and science without borders. – Prague, 2018. - V. 9. - №17 (1). - P. 105-106.

8. Космакова М.Т. Ахманова Д.М., Тулеутаева Ж.М., Шакиева А.Т.Сингулярные уравнения краевых задач теплопроводности в вырождающейся области // Известия МКТУ им. Х.А.Ясави. Серия математика, физика, информатика- 2018. Т.2, №1(4). - С.109-113.

Шұғаев Н.Н., Оразбай А.Д., Карагандинский государственный университет имени академика Е.А. Букетова, биолого-географический факультет, гр. М-11, магистранты
(*научный руководитель – к.г.н., доцент Талжанов С.А.*)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ В ПОЧВЕ КАРАГАНДИНСКОЙ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЛЬТАМПЕРОМЕТРИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА СТА

Контроль содержания таких тяжелых металлов (ТМ), как свинец, медьи кадмий, относящихся к 1 и 2 классу опасности [1], обязателен в зонах влияния автотранспорта, предприятий черной и цветной металлургии, переработки вторчермета, машиностроения и электротехнического производства[2]. Для этих металлов установлены ПДК содержания валовых форм [3].

Почва является одним из важнейших объектов окружающей среды, дающим более 90% продуктов питания и сырья для производства самой разнообразной продукции.

Сама почва имеет сложный химический состав, причем содержание органических веществ в ней колеблется от < 2 до 20% в болотистых почвах. Органические вещества подразделяют на не гуминовые вещества и гумус. Не гуминовые вещества включают не полностью разложившиеся остатки растений и животных, жиры и дубильные вещества, пектины и гемицеллюлозу, сахара и соответственно полисахариды, легко разлагаемые и поэтому не попадающие под понятие «гумус» [4].

В почве происходят сложные физико-химические, биологические и другие процессы. В отличие от других объектов окружающей среды (воздуха, воды), где протекают и процессы самоочищения, почва обладает этим свойством в незначительной мере. Более того, для некоторых веществ, в частности для тяжелых металлов, почва является емким акцептором. Тяжелые металлы прочно сорбируются и взаимодействуют с почвенным гумусом, образуя трудно – растворимые соединения. Таким образом, идет их накопление в почве. Наряду с этим в почве под воздействием различных факторов происходят постоянная миграция попадающих в нее веществ и перенос их на большие расстояния.

В почву вредные вещества могут попадать различными путями: из атмосферы в виде грубодисперсных фракций аэрозолей, входящих в состав выбросов промышленных предприятий, а также с дождем и снегом. Степень загрязнения почв вредными веществами, распределение и перенос их на расстояние зависят, с одной стороны, от мощности, характеристик и продолжительности работы предприятий, от интенсивности движения транспорта, с другой — от ландшафтно-геоморфологических условий (от сорбционной способности почвы, движения воды в горизонте, значения pH и др.). Основными источниками загрязнения почв вокруг промышленно развитых городов являются, главным образом, предприятия черной и цветной металлургии, химической, нефтехимической и энергетической промышленности[5].

Почвы могут быть хорошим сорбентом многих химических веществ. Тяжелые металлы, попадающие с выбросами предприятий, прочно связываются уже в верхнем слое. Миграция их по профилю и попадание в грунтовые воды возможны при промывном режиме и кислой реакции фильтруемых растворов. Выбросы предприятий черной металлургии загрязняют почву Ni,Mn, Cr, Cd, Co, Cu, Mo, Sn, Pb, Zn.

Наибольшей миграционной способностью обладает Zn, который, как правило, равномерно распределяется в слое почвы на глубине 0–20 см.Свинец чаще накапливается в поверхностном слое (0–2,5 см), кадмий занимает промежуточное положение между ними. Встречается накопление Pb,Cd,