

Г.Ш.Искакова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: orumbayevan@mail.ru)

О многовесовом анизотропном неравенстве вложения

В статье доказаны теоремы вложения одного многовесового многопараметрического пространства Соболева для весов общего типа на областях с произвольной геометрией. Получены условия на весовые функции ρ_i ($i=1, \dots, n$), ν и ω , при которых справедливо неравенство вложения

$$\left(\int_G |D^\alpha f|^q \omega \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_G |D^i f|^{\rho_i} \rho_i \right)^{1/\rho_i} + \left(\int_G |f|^{\rho_0} \nu \right)^{1/\rho_0} \right).$$

Ключевые слова: анизотропное, многовесовое, многопараметрическое.

Пусть G — область в R^n , $l = (l_1, \dots, l_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — векторы с целыми координатами $l_i > 0$, $\alpha_i \geq 0$.

Ниже нами будут использованы обозначения для

$$x = (x_i) = (x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, +\infty)^n, \quad y = (y_i) \in (0, +\infty]^n, \quad \lambda = (\lambda_i) \in (0, +\infty)^n, \quad t \in (0, +\infty).$$

Пусть $x \leq y$, $x < y$ — запись покоординатного сравнения,

$$\lambda x = (\lambda_i x_i), \quad (\lambda, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;$$

$$\frac{x}{y} = x : y = \left(\frac{x_i}{y_i} \right), \quad \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{y_i} \right), \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad t^\lambda = (t^{\lambda_i});$$

$$|x|_\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^{1/\lambda_i}, \quad 1 = (1), \quad \infty = (+\infty).$$

Для $x \in R^n$, множеств $E, F \subset R^n$ и $\lambda \in (0, +\infty)^n$ пусть

$$x \pm \lambda E = \{y : y = x \pm \lambda z, z \in E\}, \quad E \pm F = \{z : z = x \pm y, x \in E, y \in F\}.$$

Пусть $Q_0 = (-1, 1)^n$, область $G \subset R^n$,

$$G \left(\frac{1}{\lambda}, t \right) = \{x : x = y + \left(\frac{t}{2} \right)^\lambda Q_0\} \subset G;$$

$$G_t = \{x : x \in G, \text{dist}(x, \partial G) > t\}.$$

Пусть далее $l \in N^n$, $\alpha \in Z^n$, $\alpha \geq 0$.

$$Q = Q_d = Q_d(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in R^n : |y_i - x_i| < d/2, i=1, \dots, n\} = Q_{(2d, \lambda)}(x)$$

при $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$. Положим

$$\tau(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left(1, \sup_{d > 0} \{d : 2Q_d(x) \subset G\} \right),$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} Q_{\tau(x)}(x),$$

и пусть $I_\tau^n = \bigcup_{x \in G} \{Q : Q \subset Q(x)\}$.

Через $\nu(Q)$, $\tilde{\rho}_i(Q)$, $|\mathcal{Q}|$ будут обозначаться соответственно $\int_Q \nu^{1-r'}$, $\int_Q \rho_i^{1-p_i}$, $\int_Q dx$. Для мультиин-

декса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, для $x \in R^n$

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2};$$

$$B(x; r) = \{y \in R^n : |y - x| < r\}.$$

Через $L_{p\nu}(G)$ будет обозначаться весовое лебегово пространство с нормой

$$\|f; L_{p\nu}(G)\| = \left(\int_G |f|^p \nu \right)^{1/p}.$$

Ниже запись $A \ll B$ будет означать, что $A \leq cB$.

Определение 1 ([1]). Область G будем называть областью с условием гибкого λ -рога (гибкого конуса при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$), если при некоторых $\delta_0 \in (0, 1]$, $T \in (0, +\infty)$ для $\forall x \in G$ существует кривая $\rho(t^\lambda) = (\rho_1(t^{\lambda_1}), \dots, \rho_n(t^{\lambda_n})) = \rho(t^\lambda, x)$, $0 \leq t \leq T$, со следующими свойствами:

(а) для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ $\rho_i(u)$ абсолютно непрерывна на $[0, T^{\lambda_i}]$; $|\rho'_i(u)| \leq 1$ для п.в. $t \in [0, T]$;

(б) $\rho(0) = 0$, $x + V(\lambda, x, \delta_0) = x + \cup_{0 < t \leq T} [\rho(t^\lambda) + t^\lambda \delta_0^{\lambda} Q_0] \subset G$.

Положим при этом $T(G, \lambda, \delta_0) = \sup T$, где верхняя грань берется по всем T , для которых имеют место перечисленные свойства.

Лемма 1 ([2]). Пусть $0 < \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 1$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$. Тогда из семейства параллелепипедов

$\{\varepsilon_1^\lambda Q(x), x \in G\}$ можно извлечь B -покрытие $\{\hat{Q}^j\}$ множество G параллелепипедами $\hat{Q}^j = \varepsilon_1^\lambda Q(x^j)$.

При этом семейство $\{\tilde{Q}^j = \varepsilon_2^\lambda Q(x^j)\}$ также образует B -покрытие G . Кратности покрытия $\{\hat{Q}^j\}$, $\{\tilde{Q}^j\}$ зависят соответственно только от $n, \varepsilon_1, \lambda$ и $n, \varepsilon_2, \lambda$.

Лемма 2 ([2]). Пусть $f \in L_{p,\nu}$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \int_{G_0} |Tf|^q d\mu &\leq (2\hat{\kappa}_2)^q \sum_{j \in J} \int_{\hat{Q}^j} \left(\int_{Q(x^j)} |k(x, y) f(y)| dy \right)^q \omega(x) dx + \\ &+ 2^q \hat{\kappa}_2^q \|f; L_{p,\nu}\|^q \int_{G'} \left(\int_{G' \cap \tilde{Q}(x^j)} |k(x, y)|^{p'} \tilde{\nu}(y) dy \right)^{q/p'} \omega(x) dx, \end{aligned}$$

где $c_0 = 2\eta$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = l - |\alpha| - n < 0$.

Теорема 1. Пусть $1 < p_i \leq q < \infty$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $\gamma = l - |\alpha| - n < 0$, и пусть веса ρ_i ($i = 1, \dots, n$), ν и ω на G удовлетворяют условиям

$$A_0 = A_{pq}^{(0)}(\nu; \omega) = \sup_{Q \in I_\tau^n} \tilde{\nu}(Q)^{1/p'} \left(\int_Q \tau(x)^{-q(l-\gamma)} \omega(x) dx \right)^{1/q} < \infty;$$

$$B_0 = B_{pq}^{(0)}(\nu; \omega) = \left(\int_G \tau(x)^{-q(l-\gamma)} \omega(x) \tilde{\nu}(Q(x))^{q/p'} dx \right)^{1/q} < \infty.$$

Для $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i = A_{p_i q}^{(i)}(\rho_i; \omega) = \sup_{Q \in I_\tau^n} \left\{ \nu \operatorname{rai} \sup_{y \in Q} \left(\int_Q |y - x|^{q\gamma} \omega(x) dx \right)^{1/q} \tilde{\rho}_i(Q)^{1/p_i'} \right\} < \infty;$$

$$B_i = B_{p_i q}^{(i)}(\rho_i; \omega) = \left(\int_G \tau(x)^{q\gamma} \tilde{\rho}_i(Q(x))^{q/p_i'} \omega(x) dx \right)^{1/q} < \infty.$$

Тогда имеет место вложение

$$\left(\int_G |D^\alpha f|^q \omega \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_G |D^i f|^{p_i} \rho_i \right)^{1/p_i} + \left(\int_G |f|^{p_0} \nu \right)^{1/p_0} \right)$$

с точной постоянной

$$C \leq \sum_{i=0}^n (A_i + B_i).$$

Доказательство. Рассмотрим представление [1; 17] и вытекающие из него оценки

$$\begin{aligned} |f^{(\alpha)}(x)| &\leq c_1 \tau(x)^{-n-|\alpha|} \int_{Q(x)} |f(y)| dy + c_2 \sum_{i=1}^n \int_0^{\frac{T_x}{2\delta Q_i(x)}} t^{\gamma-1} \int_{2\delta Q_i(x)} |D_i^l f(y)| \left| k_i^{(\alpha)} \left(\frac{y-x}{t}, 1, 1 \right) \right| dy dt \leq \\ &\leq c_1 \tau(x)^{-n-|\alpha|} \int_{Q(x)} |f(y)| dy + c_2 \sum_{i=1}^n \int_{12\delta Q_i(x)}^{\frac{T_x}{2\delta Q_i(x)}} |D_i^l f(y)| \int_0^{\frac{T_x}{2\delta Q_i(x)}} t^{\gamma-1} H(\delta t - |y-x|) dt dy \leq \\ &\leq c_3 \left(\tau(x)^{-n-|\alpha|} T_0(|f|)(x) + \sum_{i=1}^n T_1(|D_i^l f|)(x) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_3 = \max(c_1, c_2) = c(\alpha, l, n, p, q)$, а $T_i g(x) = \int_G k_i(x, y) g(y) dy$, $i = 0, 1$,
 $k_0(x, y) = \chi(x, y)$, $k_1(x, y) = \chi(x, y) |y-x|^\gamma$.

В силу (1)

$$|f^{(\alpha)}(x); L_{q\omega}| \leq |T_0 f; L_{q\omega}| + c_3 \sum_{i=1}^n |T_1(|D_i^l f|)(x); L_{p_i, p_i}|, \quad (2)$$

где $\omega_0(x) = \tau(x)^{-q(n+|\alpha|)} \omega(x)$. Оценка нормы $|T_0 f; L_{q\omega_0}|$ приведена при доказательстве теоремы в [3]. Мы имеем из (15–17)

$$|T_0 f; L_{q\omega_0}| \leq (2\hat{k}_2)^q |f; L_{p_0 v}|^q \left(\hat{k}_2 A_0^q + B_0^q \right). \quad (3)$$

Для оператора T_1 и $g \in L_{ps}$ имеем

$$\int_{G_R} |T_1 g|^q \omega(x) dx \leq (2\hat{k}_2)^q \left(S_1^{(1)}(\omega; R) + S_2^{(1)}(\omega; R) \right), \quad (4)$$

где

$$S_1^{(1)}(\omega; R) = \sum_j \int_{\hat{Q}^j} \left(\int_{\hat{Q}^j} k_1(x, y) |g(y)| dy \right)^q \omega(x) dx.$$

Из обобщенного неравенства Минковского следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\hat{Q}^j} \left(\int_{\hat{Q}^j} k_1(x, y) |g(y)| dy \right)^q \omega(x) dx &= \left| \int_{\hat{Q}^j} k_1(\cdot, y) |g(y)| dy; L_{q\omega}(\hat{Q}^j) \right|^q \leq \\ &\leq \left(\int_{\hat{Q}^j} |k_1(\cdot, y) |g(y)| dy; L_{q\omega}(\hat{Q}^j) \right)^q = \\ &= \left[\int_{\hat{Q}^j} |g(y)| \rho^{1/p}(y) \rho^{-1/p}(y) \left(\int_{\hat{Q}^j} |k_1(x, y)|^q \omega(x) dx \right)^{1/q} dy \right]^q \leq \\ &\leq \left[\int_{\hat{Q}^j} \tilde{\rho}(y) \left(\int_{\hat{Q}^j} |k_1(x, y)|^q \omega(x) dx \right)^{p'/q} \rho^{q/p'} \left(\int_{\hat{Q}^j} |g(y)|^p \rho(y) dy \right)^{q/p} \right]^q \leq \\ &\leq \left[\tilde{\rho}(Q^j)^{1/p'} \operatorname{vrai sup}_{y \in Q^j} \left(\int_{\hat{Q}^j} |y-x|^{q(l-|\alpha|-n)} \omega(x) dx \right)^{1/q} \right]^q \left(\int_{\hat{Q}^j} |g(y)|^p \rho(y) dy \right)^{q/p}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что для любого $R > 0$

$$\begin{aligned} S_1^{(1)}(\omega; R) &\leq \left(A_{pq}(\rho; \omega) \right)^q \left(\sum_j \int_{\hat{Q}^j} |g(y)|^p \rho(y) dy \right)^{q/p} \leq \\ &\leq k_2 \left(A_{pq}(\rho; \omega) \right)^q |g; L_{pp}|^q. \end{aligned} \quad (6)$$

Второе слагаемое в правой части (4)

$$S_2^{(1)}(\omega; R) = |g; L_{pp}|^q \int_G \left(\int_{G \setminus 2\eta Q(x)} |k_1(x, y)|^p \tilde{\rho}(y) dy \right)^{q/p'} \omega(x) dx =$$

$$= |g; L_{pp}|^q \int_G \left(\int_{Q(x) \setminus 2\eta Q(x)} |y-x|^{p'(l-|\alpha|-n)} \tilde{\rho}(y) dy \right)^{q/p'} \omega(x) dx.$$

Если $y \notin 2\eta Q(x)$, то найдется $i = \{1, 2, \dots, n\}$, для которого $|y_i - x_i| \geq \eta\tau(x)$, откуда оценки $|y-x| \geq \eta\tau(x)$ и

$$S_2^{(1)}(\omega; R) \leq \eta^{lq} \int_G \tau(x)^{q(l-|\alpha|-n)} \tilde{\rho}(Q(x))^{q/p'} \omega(x) dx \times |g; L_{pp}|^q =$$

$$= (\eta^\gamma B_{pq}(\rho; \omega))^q |g; L_{pp}|^q. \tag{7}$$

В силу (4), (6), (7) имеем

$$|T_1(|D_i^l f|); L_{q\omega}| \leq 2^{1+1/q} \kappa_2 (k_2^{1/q} A_{p_i q}(\rho_i; \omega) + \eta^\gamma B_{p_i q}(\rho_i; \omega)) |D_i^l f; L_{p_i \rho_i}|.$$

В итоге, обращаясь к (3), а затем к (2), получим окончательную оценку. Теорема доказана.

Список литературы

- 1 *Бесов О.В.* Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога // Тр. Математического ин-та АН СССР. — 1984. — Т. 170. — С. 12–29.
- 2 *Кусайнова Л.К.* Об ограниченности одного класса операторов в весовых пространствах Лебега // Труды Междунар. конф. — Семипалатинск, 2003. — С. 94, 95.
- 3 *Искакова Г.Ш.* Об одном многовесовом анизотропном неравенстве вложения // Вестн. Караганд. ун-та, сер. Математика. — 2014. — № 1 (73). — С. 103–108.

Г.Ш.Искакова

Көпсалмақты анизотропты енгізу теңсіздігі жөнінде

Мақалада көпсалмақты көп параметрлі Соболев кеңістігін кез келген геометриялы облыста енгізу теоремасы дәлелденген. ρ_i ($i=1, \dots, n$), ν және ω салмақты функциялары үшін

$$\left(\int_G |D^\alpha f|^q \omega \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_G |D^i f|^{p_i} \rho_i \right)^{1/p_i} + \left(\int_G |f|^{p_0} \nu \right)^{1/p_0} \right)$$

енгізу теңсіздігі орындалатындай шарттар алынған.

G.Sh.Iskakova

About multigravimetric anisotropic inequality of investment

Embedding theorems of multi-weighted multi-parametric Sobolev spaces on domains with arbitrary shapes are obtained. Conditions on weight functions, ρ_i ($i=1, \dots, n$), ν and ω at which the inequality of an investment is fair are received

$$\left(\int_G |D^\alpha f|^q \omega \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_G |D^i f|^{p_i} \rho_i \right)^{1/p_i} + \left(\int_G |f|^{p_0} \nu \right)^{1/p_0} \right).$$

References

- 1 *Besov O.V. Works of Mathematical college AN SSSR, 1984, 170, p. 12–29.*
- 2 *Kusainova L.K. Works of the international conference, Semipalatinsk, 2003, p. 94, 95.*
- 3 *Iskakova G.Sh. Bull. of KSU, ser. Mathematics, 2014, 1 (73), p. 103–108.*