R.M.Mendybayev, A.M.Omarov

Main problems of migration from MySQL to Oracle DBMS

The article describes the changing aspects of the DBMS in a particular application. Touches upon particularities of the Oracle DBMS, shows a comparison of these methods approach of the DBMS to work with temporary tables and marked the uniqueness of these techniques. Offered a variety solution of tasks that have been obtained from the study of the application source code, based both on the usage the functions of procedural languages, and methods of the object-oriented programming language Java. Reflect differences in the syntax data definition language of the database.

References

1 http://all-oracle.ru/content/view/?part=1&id=111 Oracle's Objects: Sequences
2 http://orasource.ru/vremennyie-tablitsyi-v-oracle.html Temporary tables in oracle
3 http://www.intuit.ru/department/database/prmssql2000/22/ Lesson: Data definition language
4 http://plsql.ru/index.xhtml?page=intro PL\SQL, Introduction

УДК 517.946

К.Н.Оспанов, Р.Д.Ахметкалиева

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: ospanov_k@mail.ru)

О разделимости вырожденного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве

Статья посвящена исследованию разделимости и аппроксимативных свойств дифференциального оператора $ly := -y'' + r(x)y' + q(x)y,\ x \in R,$ в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2(R),\quad R = (-\infty, +\infty).$ Установлена коэрцитивная оценка решения соответствующего дифференциального уравнения второго порядка, продемонстрировано его применение к спектральным вопросам для дифференциального оператора $l.$ Получены достаточные условия существования решения одного класса нелинейных вырожденных дифференциальных уравнений второго порядка на числовой оси.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, вырожденный дифференциальный оператор, гильбертово пространство, разделимость оператора, коэрцитивная оценка, аппроксимативная свойства, замыкание оператора, вполне непрерывная резольвента, k -поперечники по Колмогорову, ограниченная обратимость, обратный оператор, сопряженный оператор.

1 Введение и основные результаты

Понятие разделимости введено в фундаментальной работе [1]. Согласно определению, оператор Штурма-Лиувилля

$$Jy = -y'' + q(x)y,\ x \in (a, +\infty),$$

называется разделимым в пространстве $L_2(a, +\infty),$ если соотношения $y, -y'' + qy \in L_2(a, +\infty)$ влекут включения $-y'',\ qy \in L_2(a, +\infty).$ Разделимость оператора J эквивалентна наличию оценки

$$\|y''\|_{L_2(a,+\infty)} + \|qy\|_{L_2(a,+\infty)} \le c\left(\|Jy\|_{L_2(a,+\infty)} + \|y\|_{L_2(a,+\infty)}\right),\ y \in D(J).$$

Авторы [1] получили (см. [2, 3]) ряд признаков разделимости $J,$ в зависимости от поведения q и его производных, а также указали примеры негладких функций $q,$ при которых J не является разделимым. Признаки разделимости $J,$ когда q не обязательно дифференцируема, получены в [4, 5]. В [6,

Репозиторий КарГУ

7] разработан так называемый «принцип локализации» доказательства разделимости двучленных эллиптических операторов высокого порядка в гильбертовом пространстве. В работах [8, 9] показано, что оператор J разделим в пространстве $L_1(-\infty,+\infty)$, если он локально суммируем и полуограничен снизу. При этом применялись методы оценки функции Грина [1–3, 8, 9] (см. [10]), параметрикса [4, 5], а также метод локальных оценок резольвент регулярных операторов [6, 7].

Достаточные условия разделимости оператора Штурма-Лиувилля

$$y''+Q(x)y,$$

когда Q — операторная функция, обсуждались в [11–15]. Существует ряд работ, которые посвящены проблеме разделимости общих эллиптических, гиперболических, а также смешанного типа операторов.

Оценки разделимости находят применение в спектральной теории операторов [15–18], позволяют получить теоремы существования и гладкости решения нелинейных уравнений, заданных в неограниченной области [11, 17–20]. Связь вопроса о разделимости с конкретными физическими задачами отмечается в [21].

Настоящая работа посвящена вопросу разделимости в $L_2:=L_2(R)$, $R=(-\infty,+\infty)$, дифференциального оператора

$$ly:=-y''+r(x)y'+q(x)y,\ \ x\in R.$$

Мы предполагаем, что функция r положительна и растет в окрестности бесконечно удаленной точки быстрее, чем $|q(x)|$. К уравнению вида $ly=f$, например, относится дифференциальное уравнение колебаний в среде с сопротивлением, зависящим от скорости [22; 111–116].

Оператор l назовем разделимым в пространстве L_2, если справедлива оценка

$$\|y''\|_2+\|ry'\|_2+\|qy\|_2\le c\left(\|ly\|_2+\|y\|_2\right),\ y\in D(l),$$

здесь $\|\cdot\|_2$ — норма в L_2. Оператор l при $r=0$ совпадает с оператором J. Тем не менее оценки разделимости l нельзя получить, применяя результаты работ [1–15].

Введем обозначения

$$\alpha_{g,h}(t)=\|g\|_{L_2(0,t)}\|h^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)}\ (t>0),\ \beta_{g,h}(\tau)=\|g\|_{L_2(\tau,0)}\|h^{-1}\|_{L_2(-\infty,\tau)}\ (\tau<0),$$

где g и h — заданные функции. Пусть

$$\gamma_{g,h}=\max\left(\sup_{t>0}\alpha_{g,h}(t),\sup_{\tau<0}\beta_{g,h}(\tau)\right).$$

Через $C_{loc}^{(1)}(R)$ обозначим множество функций f, такие что $\psi f\in C^{(1)}(R)$ для всех $\psi\in C_0^{\infty}(R)$.

Теорема 1. Пусть функция r удовлетворяет условиям

$$r\in C_{loc}^{(1)}(R),\ r\ge\delta>0,\ \gamma_{1,r}<\infty; \tag{1.1}$$

$$c^{-1}\le\frac{r(x)}{r(\eta)}\le c\ \text{ при }\ |x-\eta|\le 1,\ c>1, \tag{1.2}$$

а функция q такая, что

$$\gamma_{q,r}<+\infty. \tag{1.3}$$

Тогда для $y\in D(l)$ имеет место оценка

$$\|y''\|_2+\|ry'\|_2+\|qy\|_2\le c_l\|ly\|_2.$$

То есть, в частности, оператор l разделим в L_2.

Следующие теоремы 2–4 являются приложениями теоремы 1.

Теорема 2. Пусть для функций q и r выполнены условия (1.1)–(1.3) и $\lim_{t\to+\infty}\alpha_{q,r}(t)=0$, $\lim_{\tau\to-\infty}\beta_{q,r}(\tau)=0$. Тогда оператор l^{-1} вполне непрерывен в пространстве L_2.

Будем предполагать выполненными условия теоремы 2 и рассмотрим множество $M=\left\{y\in L_2:\|ly\|_2\le 1\right\}$. Пусть $d_k=\inf_{\Sigma_k\subset\{\Sigma_k\}}\sup_{y\in M}\inf_{w\in\Sigma_k}\|y-w\|_2$ ($k=0,1,2,\ldots$) — k-поперечники, по Колмогорову, множества M в L_2, где $\{\Sigma_k\}$ — множество всех подпространств Σ_k пространства L_2, размерности которых не больше, чем k. Через $N_2(\lambda)$ обозначим количество поперечников d_k, не меньших, чем заданное положительное число λ. Оценки функции распределения $N_2(\lambda)$ поперечников важны в вопросах приближения решений уравнения $ly=f$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда имеют место следующие оценки:

$$c_1\lambda^{-2}\mu\left\{x:\left|q(x)\right|\le c_0^{-1}\lambda^{-1}\right\}\le N_2(\lambda)\le c_2\lambda^{-2}\mu\left\{x:\left|q(x)\right|\le c_0\lambda^{-1}\right\}.$$

Пример. Пусть $q=-x^{\alpha}$ ($\alpha\ge 0$), $r=(1+x^2)^{\beta}$ ($\beta>0$). Тогда условия теоремы 1 выполнены, если $\beta\ge\frac{1+\alpha}{2}$. Если же $\beta>\frac{1+\alpha}{2}$, то выполняются условия теоремы 3 и справедливы оценки $c_0\lambda^{\frac{-7-2\beta+\varepsilon}{4}}\le N_2(\lambda)\le c_1\lambda^{\frac{-7-2\beta+\varepsilon}{4}}$ при некотором $\varepsilon>0$.

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение

$$Ly=-y''+\left[r(x,y)\right]y'=f(x), \tag{1.4}$$

где $x\in R$, r — действительнозначная функция, $f\in L_2$.

Определение 1. Функцию $y\in L_2$ назовем решением уравнения (1.4), если найдется последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, такая что для любого $\theta\in C_0^{\infty}(R)$ при $n\to\infty$ имеют место соотношения $\left\|\theta\left(y_n-y\right)\right\|_2\to 0$, $\left\|\theta\left(Ly_n-f\right)\right\|_2\to 0$.

Теорема 4. Пусть $f\in L_2$, функция r непрерывно дифференцируема по обоим аргументам и удовлетворяет условиям

$$r\ge\delta_0(1+x^2)\ \ (\delta_0>0);\ \sup_{|x-y|\le 1}\ \sup_{|C_1|\le A,|C_2|\le A,|C_1-C_2|\le A}\frac{r(x,C_1)}{r(\eta,C_2)}<\infty. \tag{1.5}$$

Тогда существует решение y уравнения (1.4), причем

$$\|y''\|_2+\left\|\left[r\left(\cdot,y\right)\right]y'\right\|_2<\infty. \tag{1.6}$$

2 Вспомогательные утверждения

Следующее утверждение есть следствие известного неравенства Б. Макенхаупта [23].

Лемма 2.1. Пусть функции g, h такие, что $\gamma_{g,h}<\infty$. Тогда для $y\in C_0^{\infty}(R)$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(x)y(x)\right|^2dx\le C\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(x)y'(x)\right|^2dx. \tag{2.1}$$

При этом, если C наименьшая константа, для которого справедлива оценка (2.1), то

$$\gamma_{g,h}\le C\le 2\gamma_{g,h}.$$

Следующая лемма является частным случаем теоремы 2.2 [24].

Лемма 2.2. Пусть заданная функция r удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left\|r^{-1}\right\|_{L_2(x,+\infty)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\int_x^{\infty}r^{-2}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

и

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{|x|}\left\|r^{-1}\right\|_{L_2(-\infty,x)}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{|x|}\left(\int_{-\infty}^{x}r^{-2}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

Тогда множество $F_K=\left\{y:y\in C_0^{\infty}(R),\int_{-\infty}^{+\infty}|r(t)y'(t)|^2\,dt\le K\right\}$, $K>0$, относительно компактно в $L_2(R)$.

Через $\mathscr{L}$ обозначим замыкание в норме пространства L_2 дифференциального выражения

$$\mathscr{L}_o z=-z'+rz, \tag{2.2}$$

определенного на множестве $C_0^{\infty}(R)$.

Репозиторий КарГУ

Лемма 2.3. Пусть функция r удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Тогда оператор $\mathscr{L}$ ограниченно обратим и разделим в L_2. Более того, для $z \in D(\mathscr{L})$ имеет место следующая оценка:

$$\|z'\|_2 + \|rz\|_2 \le c\|\mathscr{L} z\|_2. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E,\ \lambda \ge 0.$ Заметим, что операторы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$ разделимы одновременно или нет. Если z — непрерывно дифференцируемая финитная функция, то

$$(\mathscr{L}_\lambda z, z) = -\int_R z'\overline{z}\,dx + \int_R [r(x)+\lambda]|z|^2 dx. \tag{2.4}$$

Но $T = -\int_R z'\overline{z}\,dx = \int_R z\,\overline{z}'dx = -\overline{T}.$ Поэтому $\operatorname{Re} T = 0.$ Следовательно, из (2.4) вытекает

$$\operatorname{Re}(\mathscr{L}_\lambda z, z) = \int_R [r(x)+\lambda]|z|^2 dx. \tag{2.5}$$

Оценим левую часть (2.5) сверху, используя неравенство Гельдера. Тогда имеем

$$\left\|\sqrt{r(x)+\lambda}\, z\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{\sqrt{r(x)+\lambda}}\mathscr{L}_\lambda z\right\|_2 \tag{2.6}$$

$$\left\|(p_0+\lambda)^{\frac{1}{p}} z\right\|_p \le \left\|(p_0+\lambda)^{\frac{1}{p}-1}\ \tilde{L}_0 z\right\|_p,\ 1 < p < \infty.$$

Используя определение, получим, что оценка (2.6) верна и для решения z уравнения (2.2).

Пусть $\Delta_j = (j-1, j+1)\ (j \in Z),$ а $\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — последовательность функции из $C_0^\infty(\Delta_j)$ такая, что $0 \le \varphi_j \le 1,\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j \le 1\ \ \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j^2(x) = 1.$ Продолжим $r(x)$ из Δ_j на R так, чтобы ее продолжение $r_j(x)$ оказалось ограниченной периодической функцией с периодом 2. Замыкание в норме $L_2(R)$ дифференциального оператора $-z' + [r_j(x)+\lambda]z,$ определенного на $C_0^\infty(R),$ обозначим через $\mathscr{L}_{\lambda,j}\ \tilde{L}_{0\lambda j}$. Аналогично выводу оценки (2.6) доказывается неравенство

$$\left\|(r_j+\lambda)^{\frac{1}{2}} z\right\|_2 \le \left\|(r_j+\lambda)^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\lambda,j} z\right\|_2,\ z \in D(\mathscr{L}_{\lambda,j}). \tag{2.7}$$

Из оценок (2.6), (2.7) и общей теории линейных дифференциальных уравнений первого порядка вытекает, что операторы $\mathscr{L}_\lambda, \mathscr{L}_{\lambda,j}\ \ (j \in Z)$ являются обратимыми, а их обратные $\mathscr{L}_\lambda^{-1}$ и $\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}$ определены на всем $L_2(R).$ Из оценки (2.7) по условию (1.2) следует

$$\|\mathscr{L}_{\lambda,j} z\|_2 \ge c\sup_{x\in\Delta_j}[r_j(x)+\lambda]\|z\|_2,\ z \in D(\mathscr{L}_{\lambda,j}). \tag{2.8}$$

Введем операторы B_λ, M_λ:

$$B_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j'(x)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\varphi_j f\ \ B_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j'(x)\tilde{L}_{0\lambda j}^{-1}\varphi_j(x) f\ \text{ и }\ M_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\varphi_j(x)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\varphi_j f.$$

В каждой точке $x \in R$ суммы в правых частях этих выражении состоят из не более чем двух слагаемых, поэтому B_λ и M_λ определены на всем $L_2(R),$ причем, как легко проверить, выполнено равенство

$$\mathscr{L}_\lambda M_\lambda = E + B_\lambda. \tag{2.9}$$

Используя оценку (2.8) и свойства функций $\varphi_j\ (j \in Z),$ получаем, что $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\|B_\lambda\| = 0\ \ \lim_{\lambda\to\infty}\|B_\lambda\| = 0,$ следовательно, найдется число λ_0, такое что $\|B_\lambda\| \le \dfrac{1}{2}$ для всех $\lambda \ge \lambda_0.$ Тогда из (2.9) следует

$$\mathscr{L}_\lambda^{-1} = M_\lambda(E+B_\lambda)^{-1},\ \lambda \ge \lambda_0\ \ \tilde{L}_{0\lambda}^{-1} = M_\lambda(E+B_\lambda)^{-1}. \tag{2.10}$$

Репозиторий КарГУ

Используя (2.10) и свойства функций φ_j $(j \in Z)$ еще раз, имеем

$$\left\|(r+\lambda)\mathscr{L}_{\lambda}^{-1} f\right\|_2 \le c_1 \sup_{j\in Z}\left\|(r+\lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}\right\|_{L_2(\Delta_j)} \|f\|_2 . \tag{2.11}$$

$$\left\|\left(p_0(x)+\lambda\right)\tilde{L}_{0\lambda}^{-1} f\right\|_p \le \sup\nolimits_{j\in Z}\left\|\left(p_0+\lambda\right)\tilde{L}_{0\lambda}^{-1}\right\|_{L_{p(\Delta j)}} \|f\|_p .$$

Из неравенства (2.8), в силу условия (1.2), имеем

$$\sup_{j\in Z}\left\|(r+\lambda)\mathscr{L}_{\lambda,j}^{-1}F\right\|_{L_2(\Delta_j)} \le \frac{\sup\limits_{x\in\Delta_j}\left[r(x)+\lambda\right]}{\inf\limits_{x\in\Delta_j}\left[r(x)+\lambda\right]}\|F\|_{L_2(\Delta_j)} \le \sup_{|x-z|\le 2}\frac{r(x)+\lambda}{r(z)+\lambda}\|F\|_{L_2(\Delta_j)} \le c_2\|F\|_{L_2(\Delta_j)} .$$

$$\sup\nolimits_{j\in Z}\left\|(p_0+\lambda)\tilde{L}_{0\lambda j}^{-1}F\right\|_{L_p(\Delta j)} \le \frac{\sup_{x\in\Delta_j}[p_0(x)+\lambda]}{\inf_{x\in\Delta_j}[p_0(x)+\lambda]}\|F\|_{L_p(\Delta_j)} .$$

Тогда из (2.11) имеем $\|(r+\lambda)z\|_2 \le c_3\left\|\mathscr{L}_{\lambda} z\right\|_2$, $z\in D(\mathscr{L}_{\lambda})$, поэтому $\|z'\|_2 + \|(r+\lambda)z\|_2 \le (1+2c_3)\left\|\mathscr{L}_{\lambda} z\right\|_2$. Отсюда с учетом (2.6) следует оценка (2.3). Лемма доказана.

Через L обозначим замыкание в норме пространства L_2 дифференциального выражения

$$L_0 y = -y'' + r(x)y',$$

определенного на множестве $C_0^\infty(R)$. Справедлива

Лемма 2.4. Пусть функция r удовлетворяет условию (1.1). Тогда для $y\in D(L)$ имеет место оценка

$$\left\|\sqrt{r}\,y'\right\|_2 + \|y\|_2 \le c\|Ly\|_2 . \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть $y\in C_0^\infty(R)$. Интегрируя по частям, имеем

$$\left(Ly, y'\right) = -\int_R y''\overline{y}'dx + \int_R r(x)\left|y'\right|^2 dx. \tag{2.13}$$

Так как $A = -\int_R y''\overline{y}'dx = \int_R y'\overline{y}''dx = -\overline{A}$, имеем $\operatorname{Re} A = 0$. Поэтому из (2.13) следует

$$\operatorname{Re}\left(Ly, y'\right) = \int_R r(x)\left|y'\right|^2 dx.$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера и пользуясь условием (1.1), получим оценку

$$c_0\left\|\sqrt{r}\,y'\right\|_2 \le \|Ly\|_2 . \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14) и леммы 2.1 вытекает оценка (2.12) для $y\in C_0^\infty(R)$. Если y — произвольный элемент $D(L)$, то найдется последовательность функций $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(R)$ такая, что $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|Ly_n - Ly\|_2 \to 0$ при $n\to\infty$. Для y_n имеет место оценка (2.12), из нее, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим такую же оценку для y. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Утверждение леммы 2.1 остается справедливым, если $r(x)$ — комплекснозначная функция, а вместо (1.3) выполняется условие

$$\operatorname{Re} r \ge \delta > 0,\ \gamma_{1,\operatorname{Re} r} < \infty.$$

Из леммы 2.1 следует, что условия на функцию r в лемме 2.4 являются естественными.

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv -y'' + r(x)y' = f, \qquad f\in L_2. \tag{2.15}$$

Решением (2.15) назовем функцию $y\in L_2$, для которой найдется последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(R)$ такая, что $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|Ly_n - f\|_2 \to 0$ при $n\to\infty$. Имеет место

Лемма 2.5. Если функция r удовлетворяет условию (1.1), то уравнение (2.15) имеет притом единственное решение. Кроме того, если выполнено условие (1.2), то для решения y уравнения (2.15) имеет место оценка

$$\left\|y''\right\|_2 + \left\|ry'\right\|_2 \le c_L\|Ly\|_2 ,$$

т.е., в частности, оператор L разделим в пространстве L_2.

Репозиторий КарГУ

Доказательство. Согласно оценке (2.12) решение y уравнения (2.15) единственно и принадлежит $W_2^1(R)$. Докажем, что уравнение (2.15) разрешимо. Предположим противное, пусть $R(L)\neq L_2$. Тогда найдется ненулевой элемент $z_0\in L_2$, такой что $z_0\perp R(L)$, и z_0, согласно общей теории операторов, является обобщенным решением уравнения

$$L^* y\equiv -y''+[r(x)y]'=0,\ \text{или}\ -z_0'+r(x)z_0=C.$$

Не ограничивая общности, положим $C=1$. Тогда

$$z_0=c_0\exp\left[-\int_a^x r(t)dt\right]+\int_a^x \exp\left[-\int_a^t r(\tau)d\tau\right]dt=z_1+z_2. \tag{2.16}$$

Тогда если $c_0>0$, то $z_0\geq c_0$ при $x>a$. Если же $c_0\leq 0$, то в (2.16) $z_1\to 0$ при $x\to-\infty$, а $|z_2(x)|\geq c_1\exp[-\delta_0 x]$ ($0<\delta_0<\delta$) при $x<<a$. Таким образом, $z_0\notin L_2$. Получено противоречие, которое показывает, что решение уравнения (2.15) существует.

Далее в L_2 разделим оператор $\mathscr{L}$. Это вытекает из леммы 2.3. Тогда по построению в L_2 разделим и оператор L. Лемма доказана.

Лемма 2.6. Пусть функция r удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), $\gamma_{1,r}<\infty$ и

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\left\|r^{-1}\right\|_{L_2(t,+\infty)}=0,\ \lim_{t\to-\infty}\sqrt{|t|}\left\|r^{-1}\right\|_{L_2(-\infty,t)}=0. \tag{2.17}$$

Тогда оператор L^{-1}, обратный к L, является компактным в пространстве L_2.

Доказательство. Из леммы 2.5 следует, что оператор L^{-1} существует и переводит L_2 в пространство $W_{2,r}^2(R)$ с нормой $\|y''\|_2+\|ry'\|_2+\|y\|_2$. Согласно лемме 2.2 при выполнении условия (2.17) пространство $W_{2,r}^2(R)$ компактно вложено в L_2. Следовательно, оператор L^{-1} компактен в L_2. Теорема доказана.

Лемма 2.7. Пусть функция r удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), $\gamma_{1,r}<\infty$ и

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\left\|r^{-\theta}\right\|_{L_2(t,+\infty)}=0,\ \lim_{t\to-\infty}\sqrt{|t|}\left\|r^{-\theta}\right\|_{L_2(-\infty,t)}=0$$

при некотором $\theta\in(0,1)$. Тогда оператор L^{-1}, обратный к L, вполне непрерывен в пространстве $W_2^1(R)$.

Доказательство леммы проводится аналогично лемме 2.6 путем непосредственной проверки признака Колмогорова-Фреше компактности множеств в пространстве $W_2^1(R)$ С.Л. Соболева.

3 Доказательства теорем 1 и 4

Доказательство теоремы 1. Из леммы 2.5 следует, что оператор $Ly\equiv -y''+r(x)y'$ разделим в L_2. Из условия (1.3) и неравенства (2.1) вытекают оценки $\|qy\|_2\leq 2\gamma_{q,r}\|ry'\|_2\leq \frac{2}{\sqrt{\delta}}\gamma_{q,r}c\|Ly\|_2$, $y\in D(L)$. Это означает, что оператор $l=L+qE$ также разделим в L_2. Теорема доказана.

Теорема 2 есть следствие лемм 2.2, 2.5 и теоремы 1.

Утверждение теоремы 3 следует из теоремы 2 и теоремы 1 [25].

Доказательство теоремы 4. Пусть ε, A — положительные числа. Положим $S_A=\left\{z\in W_2^1(R):\|z\|_{W_2^1(R)}\leq A\right\}$. Возьмем функцию $v\in S_A$ и рассмотрим линейное «возмущенное» уравнение

$$l_{0,v,\varepsilon}y\equiv -y''+\left[r(x,v(x))+\varepsilon\left(1+x^2\right)^2\right]y'=f(x), \tag{3.1}$$

где $\varepsilon>0$. Минимальный замкнутый в L_2 оператор, порожденный выражением $l_{0,v,\varepsilon}y$, обозначим через $l_{v,\varepsilon}$. Поскольку $r_\varepsilon(x):=r(x,v(x))+\varepsilon\left(1+x^2\right)^2\geq 1+\varepsilon\left(1+x^2\right)^2$, для $r_\varepsilon(x)$ выполнено условие (1.1).

Репозиторий КарГУ

Далее для $v\in S_A$ при $|x-\eta|\le 1$ имеем

$$\left|v(x)-v(\eta)\right|\le|x-\eta|\|v'\|_p\le|x-\eta|\|v\|_{W_2^1}\le A. \qquad (3.2)$$

Легко проверить, что $\sup\limits_{|x-\eta|\le 1}\dfrac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+\eta^2\right)^2}\le 3$. Тогда, полагая $v(x)=C_1,\ v(\eta)=C_2$, с учетом условия (1.5) и неравенства (3.2) получим

$$\sup_{|x-\eta|\le 1}\frac{r_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon(\eta)}\le\sup_{|x-\eta|\le 1}\ \sup_{|C_1|\le A,|C_2|\le A,|C_1-C_2|\le A}\frac{r(x,C_1)}{r(\eta,C_2)}+3<\infty.$$

Итак, коэффициент $r_\varepsilon(x)$ уравнения (3.1) удовлетворяет всем условиям леммы 2.5. Тогда уравнение (3.1) имеет притом единственное решение y, а оператор $l_{v,\varepsilon}$ разделим, т.е. для решения y имеет место оценка

$$\|y''\|_2+\left\|\left[r\left(\cdot,v(\cdot)\right)+\varepsilon(1+x^2)^2\right]y'\right\|_2\le C_3\|f\|_2. \qquad (3.3)$$

По условию (1.5) и неравенству (2.1)

$$\|y\|_2\le C_0\|ry'\|_2,\ \left\|\left(1+x^2\right)y\right\|_2\le C_4\left\|\left(1+x^2\right)^2y'\right\|_2.$$

С их учетом из (3.3) имеем

$$\|y''\|_2+\frac{1}{2}\left\|(1+x^2)y'\right\|_2+\frac{1}{2C_0}\|y\|_2+\frac{\varepsilon}{C_4}\left\|(1+x^2)y\right\|_2\le C_3\|f\|_2,$$

откуда при некотором $C_5>0$ вытекает оценка

$$\|y\|_W:=\|y''\|_2+\left\|(1+x^2)y'\right\|_2+\left\|\left[1+\varepsilon(1+x^2)\right]y\right\|_2\le C_5\|f\|_2. \qquad (3.4)$$

Радиус A шара S_A выберем равным $C_5\|f\|_2$. Обозначим $P(v,\varepsilon):=L_{v,\varepsilon}^{-1}f$. Согласно оценке (3.4) оператор $P(v,\varepsilon)$ переводит шар S_A в себя. Более того, оператор $P(v,\varepsilon)$ переводит шар S_A в множесто $Q_A=\left\{y:\|y''\|_2+\left\|\left(1+x^2\right)y'\right\|_2+\varepsilon\left\|\left[1+\varepsilon\left(1+x^2\right)\right]y'\right\|_2\le C_5\|f\|_2\right\}$. Множество Q_A является компактным в пространстве $W_2^1(R)$ С.Л.Соболева. Действительно, если $y\in Q_A,\ h\ne 0$ и $N>0$, то выполнены следующие две цепочки соотношений:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|y'(t+h)-y'(t)\right|^2+\left|y(t+h)-y(t)\right|^2\right]dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|\int_t^{t+h}y''(\eta)d\eta\right|^2+\left|\int_t^{t+h}y'(\eta)d\eta\right|^2\right]dt\le$$

$$\le|h|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|\int_t^{t+h}y''(\eta)d\eta\right|+\left|\int_t^{t+h}y'(\eta)d\eta\right|\right]dt=|h|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|y''(\eta)\right|^2+\left|y'(\eta)\right|^2\right]d\eta\le C_5\|f\|_2|h|^2; \qquad (3.5)$$

$$\int_{|\eta|\ge N}\left[\left|y'(\eta)\right|^2+\left|y(\eta)\right|^2\right]d\eta\le\int_{|\eta|\ge N}(1+\eta^2)^{-2}\left[\left|y''(\eta)\right|^2+(1+\eta^2)^2\left|y'(\eta)\right|^2+(1+\eta^2)^2\left|y(\eta)\right|^2\right]d\eta\le$$

$$\le C_5^2\|f\|_2^2(1+N^2)^{-2}. \qquad (3.6)$$

Выражения в правых частях (3.5) и (3.6) стремятся к нулю, соответственно, при $h\to 0$ и при $N\to+\infty$. Тогда по критерию Колмогорова-Фреше множество Q_A компактно в пространстве $W_2^1(R)$ С.Л. Соболева. Следовательно, $P(v,\varepsilon)$ — компактный оператор.

Покажем, что оператор $P(v,\varepsilon)$ непрерывен по $v\in S_A$. Пусть $\{v_n\}\subset S_A$ — такая последовательность, что $\|v_n-v\|_{W_2^1}\to 0,\ n\to\infty$. Пусть y_n и y такие, что $L_{v,\varepsilon}^{-1}y=f,\ L_{v_n,\varepsilon}^{-1}y_n=f$. Тогда, согласно определению оператора $P(v,\varepsilon)$, достаточно показать, что $\{y_n\}$ сходится к y в норме пространства $W_2^1(R)$ при $n\to\infty$. Имеем

$$P(v_n,\varepsilon)-P(v,\varepsilon)=y_n-y=L_{v_n,\varepsilon}^{-1}\left[r(x,v_n(x))-r(x,v(x))\right]y_n'.$$

Репозиторий КарГУ

Функции $v(x),\ v_n(x)\ (n=1,2,...)$ непрерывны, тогда по условию теоремы функция $r(x,v_n(x))-r(x,v(x))$ также непрерывна по x, поэтому для каждого конечного промежутка $[-a,a],\ a>0,$ имеем

$$\|y_n-y\|_{W_2^1(-a,a)}\le c\max_{x\in[-a,a]}|r(x,v_n(x))-r(x,v)|\cdot\|y_n'\|_{L_2(-a,a)}\to 0 \tag{3.7}$$

при $n\to\infty$. С другой стороны, из леммы 2.4 следует, что $\{y_n\}\in Q_A,\ \|y_n\|_W\le A,\ y\in Q_A,\ \|y\|_W\le A.$ Выше мы показали, что множество Q_A компактно в $W_2^1(R)$. Следовательно, $\{y_n\}$ сходится в норме $W_2^1(R)$. Пусть z — ее предел. В силу свойств $W_2^1(R)$

$$\lim_{|x|\to\infty}y(x)=0,\ \lim_{|x|\to\infty}z(x)=0, \tag{3.8}$$

из (3.7) и (3.8), в силу замкнутости оператора $L_{v,\varepsilon}^{-1}$, получим $y=z.$ Таким образом

$$\|P(v_n,\varepsilon)-P(v,\varepsilon)\|_{W_2^1(R)}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Итак $P(v,\varepsilon)$ — вполне непрерывный оператор в пространстве $W_2^1(R)$ и переводит шар S_A в себя, тогда согласно теореме Шаудера он имеет в S_A неподвижную точку $y: P(y,\varepsilon)=y.$ y является решением уравнения

$$L_\varepsilon y:=-y''+\left[r(x,y)+\varepsilon(1+x^2)^2\right]y'=f(x).$$

В силу (3.3) для y справедлива оценка $\|y''\|_2+\left\|\left[r(\cdot,y)+\varepsilon(1+x^2)^2\right]y'\right\|_2\le C_3\|f\|_2.$

Теперь пусть $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, $P(v,\varepsilon_j):=L_{v,\varepsilon_j}^{-1}f.$ Неподвижная точка $y_j\in S_A$ оператора $P(v,\varepsilon_j)$ есть решение уравнения

$$L_{\varepsilon_j}y_j:=-y_j''+\left[r(x,y_j)+\varepsilon_j(1+x^2)^2\right]y_j'=f(x).$$

Для него имеет место оценка

$$\|y_j''\|_2+\left\|\left[r\left(\cdot,y_j(\cdot)\right)+\varepsilon\left(1+x^2\right)^2\right]y_j'\right\|_2\le C_3\|f\|_2. \tag{3.9}$$

Пусть (a,b) — произвольно выбранный конечный промежуток. В силу (3.9) из последовательности $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}\subset W_2^2(a,b)$ можно выделить такую подпоследовательность $\left\{y_{\varepsilon_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$, что $\left\|y_{\varepsilon_j}-y\right\|_{L_2[a,b]}\to 0$ при $j\to\infty$. Непосредственная проверка показывает, что y является решением уравнения (1.4) в смысле определения 1. Переходя в неравенстве (3.9) к пределу при $j\to\infty$, получим (1.6). Теорема доказана.

Список литературы

1 *Everitt W.N., Giertz M.* Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. Lond. Math. Soc. — Vol. 23 (3). — 1971. — P. 301–324.

2 *Everitt W.N., Giertz M. Some inequalities associated with certain differential operators* // Math. Z. 1972. — Vol. 126. — P. 308–326.

3 *Everitt W.N., Giertz M.* An example concerning the separation property of differential operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1973. — Vol. 71. 2. — P. 159–165.

4 *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости для оператора Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. —1973. — Т. 14. — С. 761–767.

5 *Отелбаев М.* О суммируемости с весом решения уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. —1974. — Т. 16. — С. 969–980.

6 *Отелбаев М.* Разделимость эллиптических операторов // Докл. АН СССР. —1977. — Т. 234. 3. — С. 540–543.

7 *Отелбаев М.* Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Тр. МИАН СССР. — 1983. — Т. 161. — С. 195–217.

8 *Ойнаров Р.* О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций // ДАН СССР. — 1985 — Т. 285. 5. — С. 1062–1064.

Репозиторий КарГУ

9 *Отелбаев М., Гриншпун Э.З.* О гладкости решения нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. 5. — 1984. — С. 26–29.

10 *Chernyavskaya N., Shuster L.* Weight summability of solutions of the Sturm-Liouville equation // J. Differential Equations. — 1999. — Vol. 151. 2. — P. 456–473.

11 *Биргебаев А.* Гладкость решений нелинейных дифференциальных уравнений с матричным потенциалом: Материалы VII науч. конф. по математике и механике. — Алматы, 1989.

12 *Мохамед А.С.* Разделимость оператора Шредингера с матричным потенциалом // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 1992. — Т. 35. 3. — С. 156–159.

13 *Mohammed A.S., Atia H.A.* Separation of the Sturm–Liouville differential operator with an operator potential // Appl. Math. Comput. — 2004. — Vol. 156. 2. — P. 387–394.

14 *Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A.* Inequalities and separation for the Laplace–Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 336. 1. — P. 81–92.

15 *Муратбеков М.Б., Сейтбекова Л.Р.* О гильбертовости резольвент одного класса неполуограниченных дифференциальных операторов // Матем. журнал. — 2002. — Т. 2. 4 (6). — С. 62–67.

16 *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. МИ АН СССР. — 1984. — Т. 170. — С. 37–76.

17 *Муратбеков М.Б.* Разделимость и оценки поперечников множеств, связанных с областью определения нелинейного оператора типа Шредингера // Дифф. урав. —1991. — Т. 127. 6. — С. 1034–1042.

18 *Оспанов К.Н.* О нелинейной обобщенной системе Коши-Римана на всей плоскости // Сиб. матем. журн. — Т. 38. 2. — 1997. — С. 365–371.

19 *Муратбеков М.Б., Отелбаев М.* Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Изв. вузов. — Математика. —1989. — Т. 27. 3. — С. 44–47.

20 *Ospanov K.* Coercive estimates for a degenerate elliptic system of equations with spectral applications // Appl. Math. Letters. — Vol. 24. 9. — 2011. — P. 1594–1598.

21 *Omran S., Gepreel Kh.A., Nofal E.T.A.* Separation of the general differential wave equation in Hilbert space // Int. J. of Nonlinear Sci. —2011. — Vol. 11. 3. — P. 358–365.

22 *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

23 *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights // Studia Math. —1972. — Vol. 44. — P. 31–38.

24 *Апышев О.Д., Отелбаев М.* О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43. 4. — С. 739–764.

25 *Отелбаев М.* Двусторонние оценки поперечников и их применения // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 231. 4. — С. 810–813.

К.Н.Оспанов, Р.Д.Ахметқалиева

Азғындалған дифференциалдық оператордың Гильберт кеңістігіндегі бөліктенуі туралы

Мақала $ly := -y'' + r(x)y' + q(x)y, \quad x \in R,$ дифференциалдық операторының $L_2 := L_2(R), \quad R = (-\infty, +\infty),$ гильберт кеңістігіндегі бөліктену және аппроксимативті қасиеттерін зерттеуге арналған. Оған сәйкес екінші ретті дифференциалдық теңдеу шешімінің коэрцитивті бағалауы алынды және оның l дифференциалдық операторының спектралды мәселелеріне қолданылуы келтірілді. Сызықты емес азғындалған екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің бір класы үшін шешімдерінің сан осінде бар болуының жеткілікті шарттары анықталды.

K.N.Ospanov, R.D.Ahmetkalieva

On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space

This paper is devoted to the study of separation and approximation properties for the differential operator $ly := -y'' + r(x)y' + q(x)y, \quad x \in R$ in Hilbert space $L_2 := L_2(R), \quad R = (-\infty, +\infty).$ A coercive estimate for a solution of a corresponding degenerate second order differential equation is installed and its applications to spectral problems for the differential operator l is demonstrated. The sufficient conditions for the existence of the solutions of one class of the degenerate nonlinear second order differential equations on the real axis are obtained.

Репозиторий КарГУ

References

1 Everitt W.N., Giertz M. *Some properties of the domains of certain differential operators* // Proc. Lond. Math. Soc., vol. 23 (3), 1971, p. 301–324.

2 Everitt W.N., Giertz M. *Some inequalities associated with certain differential operators* // Math. Z., 1972, vol. 126, p. 308–326.

3 Everitt W.N., Giertz M. *An example concerning the separation property of differential operators* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A., 1973, vol. 71. 2, p. 159–165.

4 Boimatov Kh.H. *Separability theorems for the Sturm-Liouville operator* // Mat. Zametki, 1973, vol. 14, p. 349–359.

5 Otelbaev M. *The summability with weight of the solution of a Sturm-Liouville equation* // Mat. Zametki, 1974, vol. 16, p. 969–980.

6 Otelbaev M. *The separation of elliptic operators* // Dokl. AN SSSR, 1977, vol. 234. 3, p. 540–543.

7 Otelbaev M. *Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in* R^n // Trudy Mat. Inst. Steklov, 1983, vol. 161, p. 195–217.

8 Oinarov R. *Separability of the Schrodinger operator in the space of summable functions* // Dokl. AN SSSR, 1985, vol. 285. 5, p. 1062–1064.

9 Otelbaev M., Grinshpun E.Z. *Smoothness of solutions of a nonlinear Sturm-Liouville equation* // Izv. AN Kazakh. SSR Ser. Fiz.-Mat., 5, 1984, p. 26–29.

10 Chernyavskaya N., Shuster L. *Weight summability of solutions of the Sturm-Liouville equation*. J. Differential Equations, 1999, vol. 151. 2, p. 456–473.

11 Birgebaev A. *Smooth solution of non-linear differential equation with matrix potential*: The VII Scientific Conference of Mathematics and Mechanics. — Almaty, 1989.

12 Mohamed A.S. *Separability of the Schrodinger operator with matrix potential* // Dokl. AN Respub. Tadzhikistan, 1992, vol. 35. 3, p. 156–159.

13 Mohammed A.S., Atia H.A. *Separation of the Sturm-Liouville differential operator with an operator potential* // Appl. Math. Comput, 2004, vol. 156. 2, p. 387–394.

14 Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. *Inequalities and separation for the Laplace–Beltrami differential operator in Hilbert spaces*. J. Math. Anal. Appl., 2007, vol. 336. 1, p. 81–92.

15 Muratbekov M.B., Seitbekova L.R. *On the Hilbert property of resolvents of a class of non-semi-bounded differential operators* // Mat. Zh., 2002, vol. 2. 4 (6), p. 62–67.

16 Boimatov K.Kh. *Separability theorems, weighted spaces and their applications* // Trudy Math. Inst. AN SSSR, 1984, 170, p. 37–76.

17 Muratbekov M.B. *Separability and estimates for the widths of sets connected with the domain of a nonlinear operator of Schrodinger type* // Differential equations, 1991, vol. 127. 6, p. 1034–1042.

18 Ospanov K.N. *On the nonlinear generalized Cauchy-Riemann system on the whole plane* // Sibirsk. Mat. Zh., 1997, vol. 38. 2, p. 365–371.

19 Muratbekov M.B., Otelbaev M. *Smoothness and approximation properties for solutions of a class of nonlinear equations of Schrodinger type* // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1989, vol. 27. 3, p. 44–47.

20 Ospanov K. Coercive estimates for a degenerate elliptic system of equations with spectral applications. Appl. Math. Letters, 2011, vol. 24. 9, p. 1594–1598.

21 Omran S., Gepreel Kh.A., Nofal E.T.A. *Separation of the general differential wave equation in Hilbert space* // Int. J. of Nonlinear Sci., 2011, vol. 11. 3, p. 358–365.

22 Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Equations of mathematical physics*. — Moscow: Nauka, 1977.

23 Muckenhoupt B. *Hardy's inequality with weights* // Studia Math., 1972, vol. 44, p. 31–38.

24 Apyshev O.D., Otelbaev M. *The spectrum of a class of differential operators and some imbedding theorems* // Izv. AN SSSR Ser., Mat., 1979, vol. 43. 4, p. 739–764.

25 Otelbaev M. *Two-sided estimates of widths and their applications* // Dokl. AN SSSR, 1976, vol. 231. 4, p. 810–813.

Репозиторий КарГУ